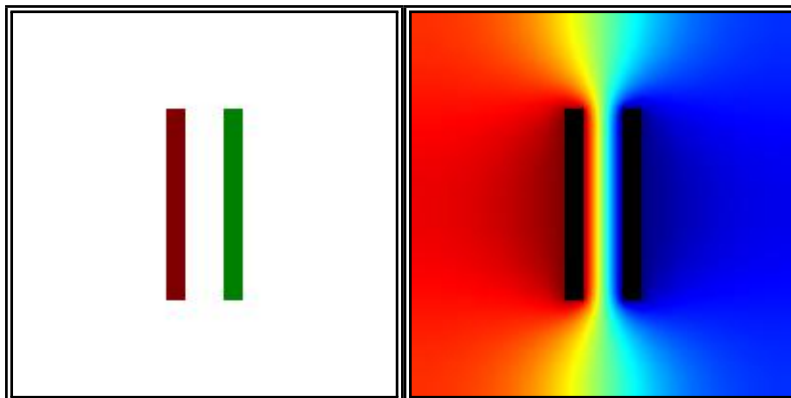


1                   **Liebmann technical documentation**  
2                   **Liebmann - dokumentacja techniczna**



4                   Wyznaczanie rozkładu pola elektrostatycznego w próżni  
5                   metodą relaksacyjną Liebmann.  
6                   (wersja polska)

7                   Determination of electrostatic field distribution in vacuum by  
8                   Liebmann relaxation method  
9                   (Polish version)

10                   autor: Marcin Kulbaka  
11                   email: mkulbaka@onet.pl  
12                   strona domowa projektu: <http://marcinkulbaka.prv.pl/Liebmann/index.html>

13                   licencja: GNU General Public License v3.0+

14                   **wersja 3**  
15                   **2024.05.24**

16                   University of Maria Skłodowska - Curie in Lublin, Poland

## 17 Spis treści

18	<b>1 Dokumentacja techniczna programu Liebmann - dokumenty tej serii</b>	<b>2</b>
19	<b>2 Wersje tego dokumentu</b>	<b>2</b>
20	<b>3 Spis symboli</b>	<b>2</b>
21	<b>4 Po co tyle wysiłku?</b>	<b>3</b>
22	4.1 Problem poznany w szkole średniej . . . . .	3
23	4.2 Przykład - lampa oscyloskopowa . . . . .	3
24	4.3 Dlaczego pole elektrostatyczne? . . . . .	5
25	4.4 Przykład - płytki odchylające . . . . .	5
26	4.5 Pole elektrostatyczne pomiędzy płytkami - szczegóły . . . . .	5
27	<b>5 Elektrostatyka - wprowadzenie</b>	<b>6</b>
28	5.1 Oddziaływanie elektrostatyczne . . . . .	6
29	5.1.1 Historia . . . . .	6
30	5.1.2 Nośniki ładunku elektrycznego . . . . .	6
31	5.2 Prawo Coulomba . . . . .	7
32	5.3 Prawo Coulomba - zadania . . . . .	7
33	5.4 Pole elektrostatyczne . . . . .	7
34	5.4.1 Natężenie pola elektrycznego . . . . .	7
35	5.4.2 Indukcja pola elektrycznego . . . . .	7
36	5.5 Pole elektrostatyczne - zadania . . . . .	7
37	5.6 Praca w polu elektrostatycznym . . . . .	7
38	5.7 Praca w polu elektrostatycznym - zadania . . . . .	7
39	<b>6 Równanie Laplace'a</b>	<b>7</b>
40	6.1 Prawo Gaussa w ujęciu całkowym . . . . .	7
41	6.2 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa . . . . .	8
42	6.3 Prawo Gaussa w ujęciu różniczkowym . . . . .	8
43	6.4 Równanie Poissona . . . . .	8
44	6.5 Równanie Laplace'a . . . . .	8
45	<b>7 Rozwiązywanie równanie Laplace'a metodą relaksacyjną</b>	<b>8</b>
46	<b>8 Mesh XY - type D</b>	<b>10</b>
47	<b>9 Example of D-type mesh in ANSI C</b>	<b>11</b>

## 48 1 Dokumentacja techniczna programu Liebmann - do- 49 kumety tej serii

- 50 1. Wyznaczanie rozkładu pola elektrostatycznego w próżni metodą relaksa-  
51 cyjną Liebmann. (Polish version / wersja polska)
- 52 2. Determination of electrostatic field distribution by using Liebmann relaxa-  
53 tion method. (English version / wersja angielska)
- 54 3. Graphics. Mapping voltages to colours (colormaps)
- 55 4. Laplace equation 2D (XY). (Cartesian coordinates). Relaxation scheme  
56 explained (5 - point star)
- 57 5. Laplace equation 2D (ZR). (Cylindrical coordinates). Relaxation scheme  
58 explained (5 - point star)
- 59 6. Liebmann source code. (ANSI C programming language)

## 60 2 Wersje tego dokumentu

- 61 1. version 1 - 2023.11.03
- 62 2. version 2 - 2024.01.26
- 63 3. version 3 - 2024.05.24

## 64 3 Spis symboli

- 65 •  $P_i$  -  $i$ -ty węzeł siatki
- 66 •  $V_i$  - wartość potencjału elektrycznego w węźle  $P_i$ . Jednostka: [V]
- 67 •  $h$  - krok siatki (np.  $h_x$  - krok siatki w kierunku  $x$ . Jednostka: [mm])
- 68 •  $g_{i+/-}$  - gradient potencjału w kierunku  $i$  (np.  $g_{1x-} = \frac{V_1 - V_{1x-}}{h_x}$  . Jednostka:  
69  $\left[\frac{\text{V}}{\text{mm}}\right]$
- 70 •  $i_{row}$  - indeks wiersza w siatce. Wartości:  $i_{row} = 1, 2, \dots, \text{size\_row}$
- 71 •  $i_{col}$  - index kolumny w siatce. Wartości:  $i_{col} = 1, 2, \dots, \text{size\_col}$

## 72 **4 Po co tyle wysiłku?**

### 73 **4.1 Problem poznany w szkole średniej**

74 W szkole średniej omawia się często odchyłanie torów lotu cząstek naładowa-  
75 nych w polu elektrostatycznym i magnetycznym.

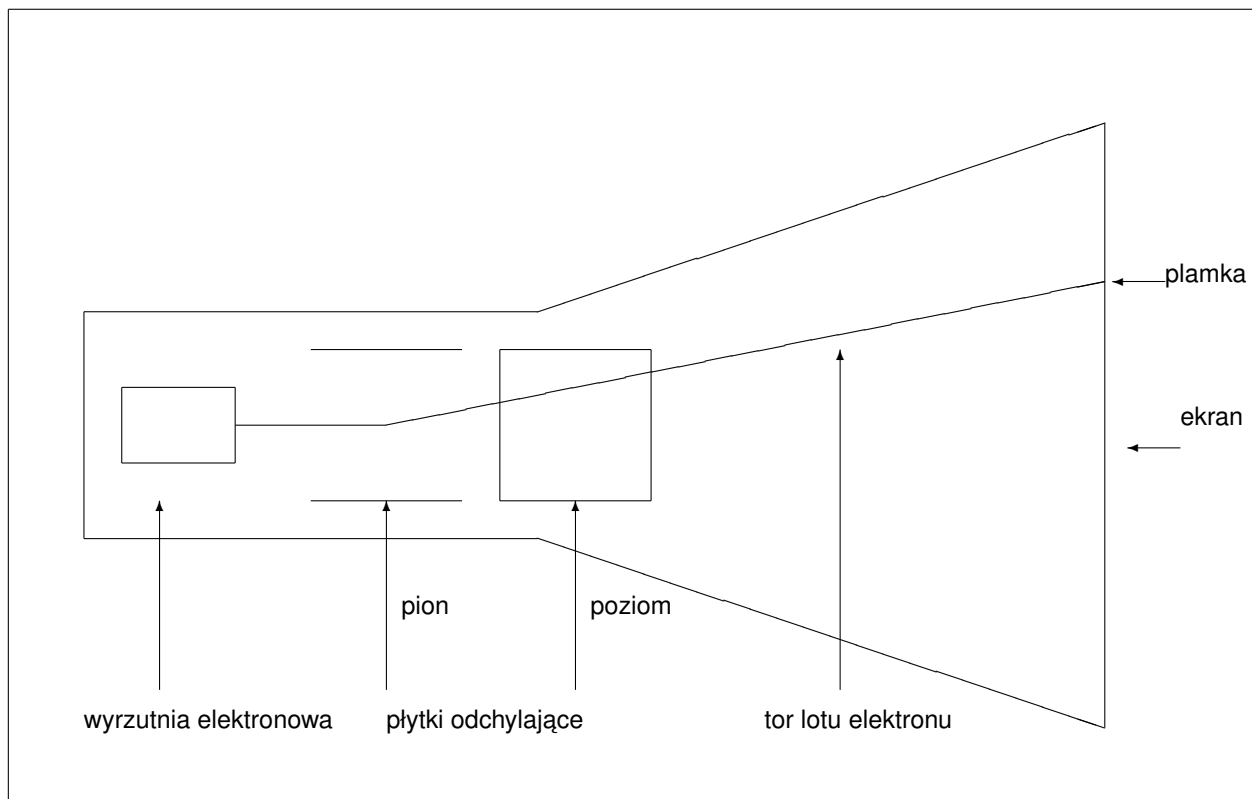
76 Znajduje to zastosowanie w różnych urządzeniach. Dawniej typowym przy-  
77 kładem był kineskop w telewizorze, bądź monitorze komputerowym. Innym waż-  
78 nym zastosowaniem była lampa oscyloskopowa. W urządzeniach tych umiejęt-  
79 ne sterowanie torem lotu elektronów pozwalało „rysować” na ekranie żądane  
80 obrazy i wykresy.

81 Bardziej zaawansowanymi urządzeniami mogą być mikroskopy elektrono-  
82 we, akceleratory cząstek czy spektrometry masowe. Obecnie ruch cząstek na-  
83 ładowanych jest nadal wykorzystywany. Telewizory i oscyloskopy co prawda  
84 przeszły ewolucję, jednak niektóre inne typy przyrządów są nadal wykorzysta-  
85 wane w nauce i technice. Spektrometry masowe, mikroskopy elektroniczne i ak-  
86 celeratory pozwalają na prowadzenie unikalnych badań. Czasem są dostępne  
87 komercyjnie. Mnogość rozwiązań jest imponująca i w sumie wykracza poza mój  
88 zakres kompetencji.

89 Co do mnie, postanowiłem zrobić i opisać symulacje podstawowych urzą-  
90 dzeń elektronowych.

91 Wracając do lampy oscyloskopowej. Zrobiłem prosty szkic.

### 92 **4.2 Przykład - lampa oscyloskopowa**



Rysunek 1: Lampa oscyloskopowa (schemat ideowy)

### 93 4.3 Dlaczego pole elektrostatyczne?

94 Pole elektrostatyczne może być wykorzystane do przyspieszania cząstek nała-  
95 dowanych lub zmiany torów ich lotu.

### 96 4.4 Przykład - płytki odchylające

97 Przykład - odchylanie toru elektronu w lampie oscyloskopowej. Problem ten jest  
98 omawiany np. w repetytorium maturalnym z fizyki Blinowskiego i Tryskiego()

99 W próżni znajduje się cząstka posiadająca masę  $m$  oraz ładunek  
100 elektryczny  $q$ .

101 Cząstka ta jest rozpędzana do prędkości  $\vec{v}$  (prędkość jest wektorem i ma w  
102 ogólności 3 składowe, w układzie kartezjańskim  $v_x, v_y, v_z$ ).

103 Cząstka wlatuje pomiędzy dwie naładowane płaskorównoległe płytki. Po-  
104 między płytkami znajduje się jednorodne pole elektrostatyczne. Pole elektro-  
105 statyczne działa na cząstkę siłą prostopadłą do początkowego kierunku wlotu.  
106 Powoduje to nadanie cząstce dodatkowej prędkości  $v_y$ .

107 Ta prędkość „poprzeczna”  $v_y$  powoduje, że tor lotu zostaje zakrzywiany.  
108 Jeżeli nasza cząstka wyleci z obszaru pola, to będzie poruszała się po linii  
109 prostej, jednak tor będzie zakrzywiony o pewien kąt. W końcu cząstka uderzy  
110 w ekran pokryty luminoforem i spowoduje to emisję światła (wywoła świecenie  
111 punktu na ekranie).

112 Generalnie można powiedzieć, że im silniejsze pole odchylające i im dłużej  
113 działa na cząstkę, tym odchylenie jest silniejsze.

### 114 4.5 Pole elektrostatyczne pomiędzy płytkami - szczegóły

115 W szkole średniej uczy się, że jeżeli płytki odchylające są blisko siebie (ich  
116 długość jest znacznie większa od odległości pomiędzy nimi), to pole elektro-  
117 statyczne można uznać za jednorodne.

118 Na studiach specjalistycznych można dowiedzieć się, że rozkład pola elek-  
119 trostatycznego można wyznaczyć dokładniej przy pomocy różnych bardziej za-  
120 awansowanych metod obliczeniowych. Generalnie wchodzimy na obszar ma-  
121 tematyki wyższej i nie są to rzeczy trywialne.

122 Rozkład pola elektrostatycznego można wyznaczyć na różne sposoby.

- 123 • Niektóre szczególne rodzaje pól elektrostatycznych można wyznaczyć  
124 ściśle przy pomocy zaawansowanych metod matematycznych.
- 125 • Czasami rozkłady pola elektrostatycznego można wyznaczyć z pomocą  
126 wzorów przybliżonych.
- 127 • Istnieją metody „analogowe”, wykorzystywane także raczej w przeszłości.  
128 Metoda wanny elektrolitycznej, metoda siatki oporowej, metoda membra-  
129 ny gumowej.

130 • Istnieją też „ogólne metody numeryczne”, pozwalające na wyznaczanie  
131 nawet mniej typowych rodzajów pól elektrostatycznych. Metody te są  
132 chętnie stosowane z powodu dużej dostępności szybkich komputerów  
133 cyfrowych. Metody te korzystają z wielu zdobyczy matematyki.

134 W sumie mogę dodać, że chyba w każdej dziedzinie życia jest więcej py-  
135 tań niż odpowiedzi. Nawet, jeżeli komputer liczy stosunkowo szybko, to i tak  
136 zawsze wskazana jest ostrożność. Projektowanie urządzenia to jedno, a bu-  
137 dowa praktyczna to już inne problemy, których na razie nie jestem do końca  
138 świadomy.

## 139 **5 Elektrostatyka - wprowadzenie**

### 140 **5.1 Oddziaływanie elektrostatyczne**

#### 141 **5.1.1 Historia**

#### 142 **5.1.2 Nośniki ładunku elektrycznego**

#### 143 **Budowa typowego atomu**

#### 144 **Budowa typowego jądra atomowego**

#### 145 **elektron**

#### 146 **proton**

#### 147 **neutron**

#### 148 **jony dodatnie**

#### 149 **jony ujemne**

#### 150 **antymateria i inne cząstki elementarne**

151	<b>5.2 Prawo Coulomba</b>
152	<b>5.3 Prawo Coulomba - zadania</b>
153	<b>5.4 Pole elektrostatyczne</b>
154	<b>5.4.1 Natężenie pola elektrycznego</b>
155	<b>5.4.2 Indukcja pola elektrycznego</b>
156	<b>5.5 Pole elektrostatyczne - zadania</b>
157	<b>5.6 Praca w polu elektrostatycznym</b>
158	<b>5.7 Praca w polu elektrostatycznym - zadania</b>

## 159 **6 Równanie Laplace’a**

### 160 **6.1 Prawo Gaussa w ujęciu całkowym**

161 Uwaga. Tutaj  $V$  oznacza objętość.

162 Treść prawa Gaussa w ujęciu całkowym.

163 Strumień natężenia pola elektrycznego  $\vec{D}$  przenikający przez zamkniętą  
 164 powierzchnię  $S$ , ograniczającą obszar o objętości  $V$  jest równy całkowitemu  
 165 ładunkowi elektrycznemu  $Q$  zawartemu w tej objętości.

$$\Phi_D = \oint_s \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = Q \quad (6.1)$$

166 Ładunek elektryczny w objętość  $V$  jest opisany zależnością:

$$\int_V \rho_{(\vec{r})} dV = Q \quad (6.2)$$

167 Tzn. całka z gęstości ładunku elektrycznego po objętości  $V$  jest równa cał-  
 168 kowitemu ładunkowi elektrycznemu znajdującemu się w tej objętości  $V$ .

169 Opracowano na podstawie Wikipedii [1] (dostęp 2024.07.19).

170 Pomiędzy indukcją pola elektrycznego a indukcją pola elektrycznego zachod-  
 171 dzi związek:

$$\vec{D}_{(\vec{r})} = \epsilon_{(\vec{r})} \vec{E} \quad (6.3)$$

172 Dla ośrodka izotropowego zachodzi związek:

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_{r(\vec{r})} \quad (6.4)$$

173 Opracowano na podstawie: Nagel 2012 [2]



## 174 6.2 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

175 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

176 Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa umożliwia zamianę całki powierzch-  
177 niowej na objętościową (potrójną) i na odwrót. Twierdzenie Ostrogradskiego -  
178 Gaussa w postaci wektorowej ma postać.

$$\oint_s \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = \int_V \left( \nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV \quad (6.5)$$

179 Można to zapisać przy pomocy operatora dywergencji:

$$\text{div} \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} \quad (6.6)$$

180 Opracowano na podstawie Wikipedii: [3] oraz [4].

## 181 6.3 Prawo Gaussa w ujęciu różniczkowym

182 Opracowano na podstawie: Nagel 2012 [2]

$$\nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} = \rho_{(\vec{r})} \quad (6.7)$$

## 183 6.4 Równanie Poissona

$$\nabla^2 V_{(\vec{r})} = -\frac{\rho_{(\vec{r})}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (6.8)$$

## 184 6.5 Równanie Laplace'a

185 Równanie Laplace'a jest szczególnym przypadkiem równania Poissona. Jest  
186 słuszne, kiedy w danym punkcie przestrzeni nie ma ładunku elektrycznego.  
187 Przykładem może być lampa elektronowa, kiedy gęstość prądu jest zaniedby-  
188 walnie mała.

189 Jeżeli w równaniu Poissona zaniedbamy gęstość ładunku elektrycznego  
190 ( $\rho_{(\vec{r})} = 0$ ), wówczas otrzymujemy równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 V_{(\vec{r})} = 0 \quad (6.9)$$

## 191 7 Rozwiązywanie równanie Laplace'a metodą relaksa- 192 cyjną

193 I tried to solve Laplace equation using mainly information from Pierre Grivet's  
194 book (Electron Optics) - [5].

195 There are few editions of this book (1965, 1972). Second edition (1972) conta-  
196 ins explanation of relaxation method (page 38).

197 More generalized approaches has been drafted by James R. Nagel - [2].  
198 <https://my.ece.utah.edu/~ece6340/LECTURES/Feb1/> (visited 2023-03-01).  
199

200 There are also publications edited by Albert Septier: Focusing of Charged  
201 Particles [6] and Applied Charged Particle Optics (part A). [7].

202 I have also found some ideas in publication of D W O Heddle: Electrostatic  
203 Lens Systems [8] (especially using PC computers to solve electrostatic pro-  
204 blems).

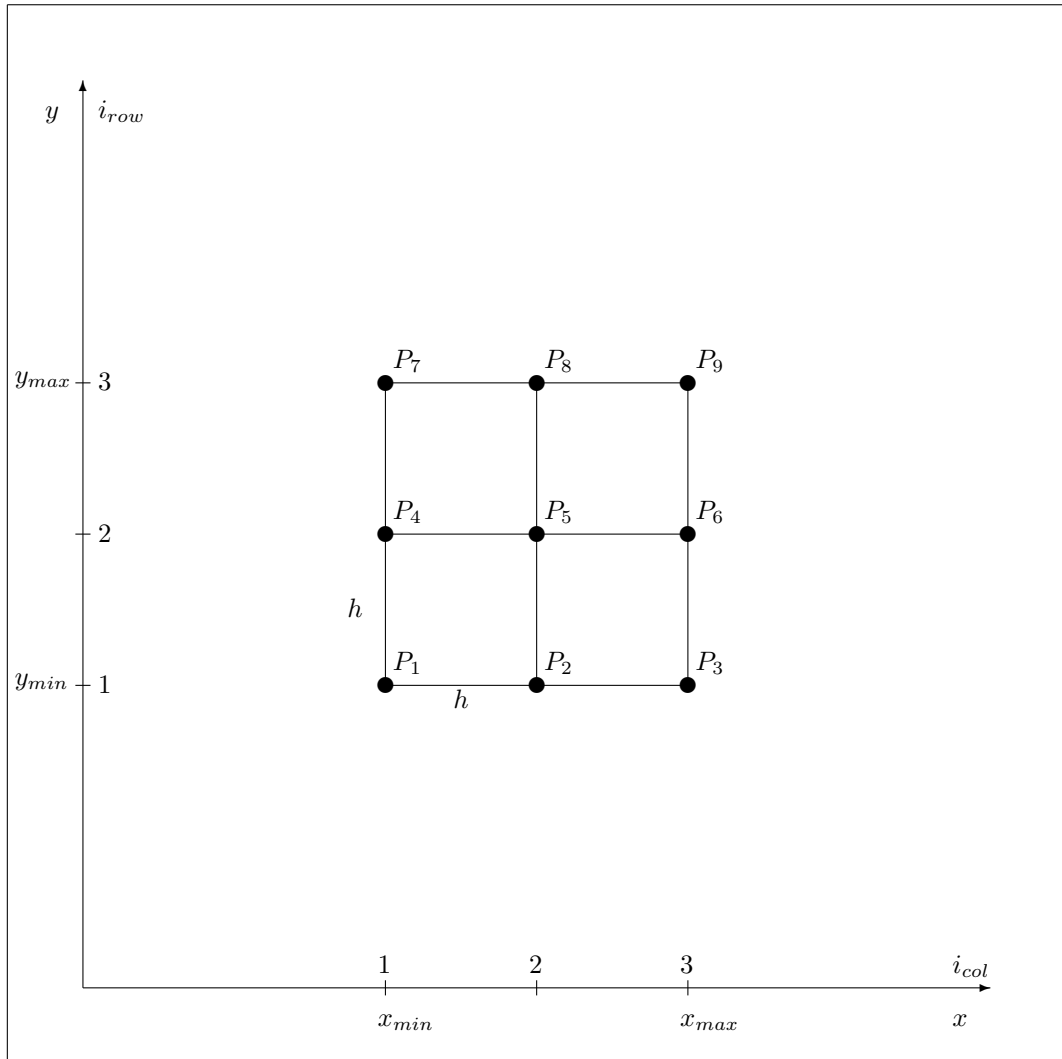
205 I have also found (brief) description of by - hand solving of Laplace equation  
206 by Bohdan Paszkowski - [9] (Polish edition). English translation of this book al-  
207 so exists - [10].  
208

209 I would like to thank many people, who helped me with this challenge. Espe-  
210 cially prof. dr hab. Mieczysław Jałochowski (supervisor of my master's thesis),  
211 who enabled me to use SIMION and MATLAB software while writing master's  
212 thesis about electron optical systems at University of Maria Curie - Skłodowska  
213 in Lublin in 2008. I would also thank to prof. Marcin Turek for fruitful discus-  
214 sion about numerical methods. What is more, my colleague Bartosz in 2012  
215 had explained me general problems with software efficiency. So he had also  
216 contributed significantly to the idea of Liebmann software (especially using C  
217 language).

218 **8 Mesh XY - type D**

219  $h_x = h_y = h$

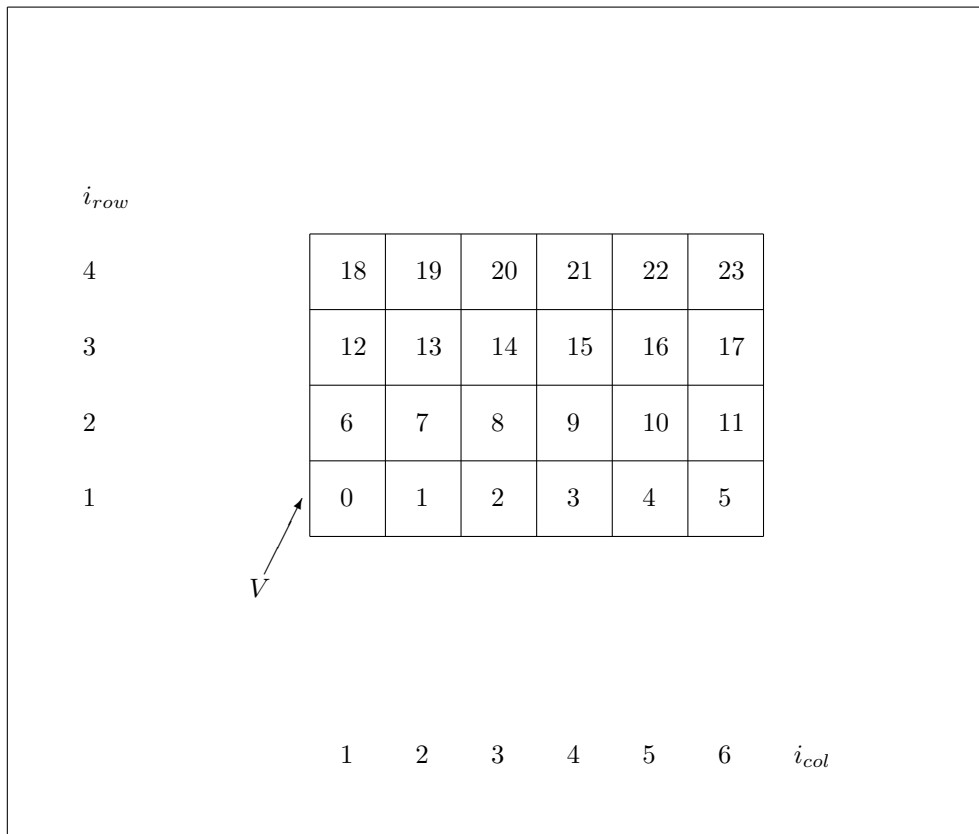
220 gradient  $V$  outside a mesh does not exist



Rysunek 2: Mesh XY type D

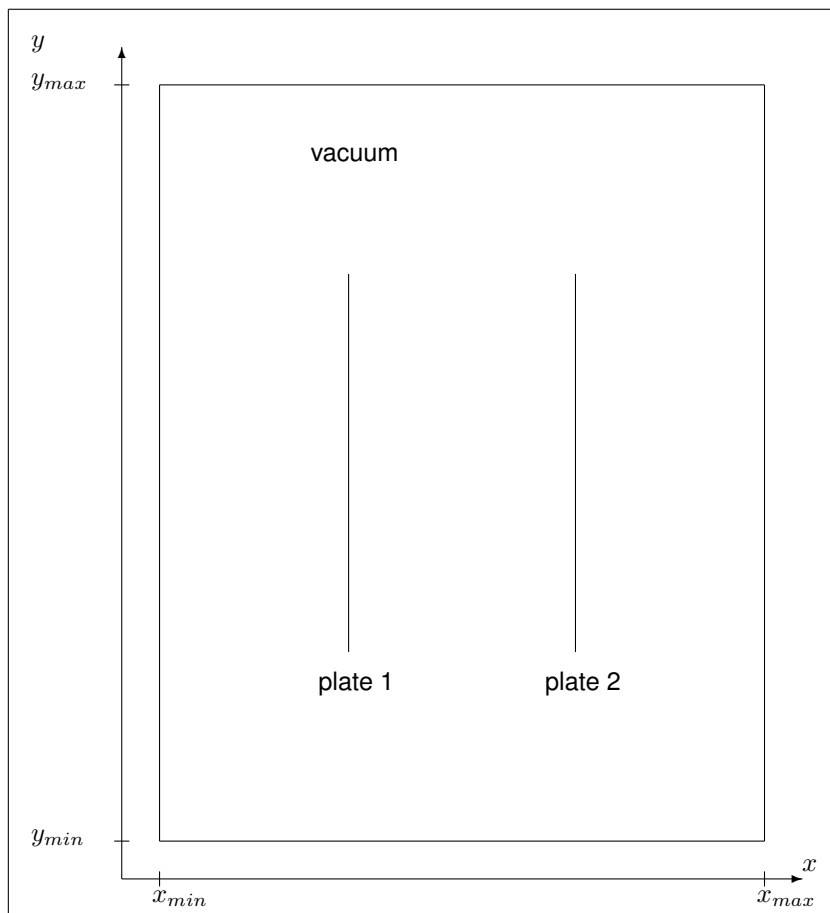
## 221 9 Example of D-type mesh in ANSI C

222 Example of D- type mesh in ANSI C program. The mesh is analogous to B -  
 223 type mesh. Just  $h_x = h_y = h$ .

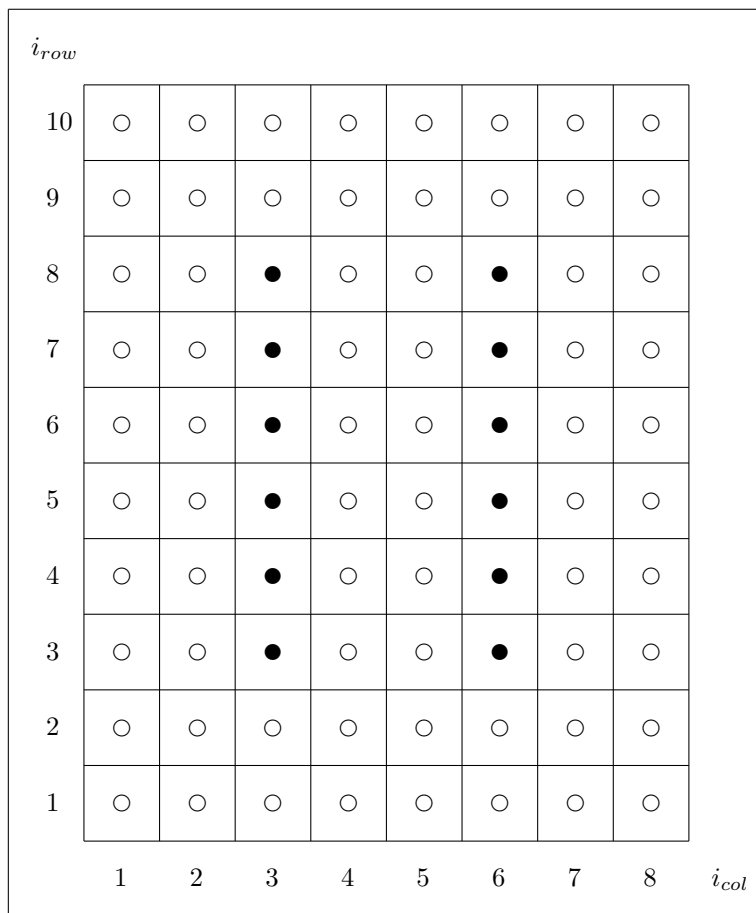


Rysunek 3: ANSI C - mesh XY type D

- 224 •  $V \equiv \text{double* ptr\_V}$
- 225 • `unsigned int size_row == 4`
- 226 • `unsigned int size_col == 6`
- 227 • `unsigned int i_row == 1, 2, ..., 4`
- 228 • `unsigned int i_col == 1, 2, ..., 6`
- 229 • `double h == 1.0 [mm]`



Rysunek 4: Example of 2D XY electrostatic problem - 2 parallel plates in vacuum



Rysunek 5: Nodes in sample mesh XY type D

230  $h_x = h_y = h$   
 231 gradient  $V$  outside a mesh does not exist

$i_{row}$									
10	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	1	0	0	2	0	0	
7	0	0	1	0	0	2	0	0	
6	0	0	1	0	0	2	0	0	
5	0	0	1	0	0	2	0	0	
4	0	0	1	0	0	2	0	0	
3	0	0	1	0	0	2	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	$i_{col}$

Rysunek 6: Boundaries in sample mesh XY type D

$i_{row}$									
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
8	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
7	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
6	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
5	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
4	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
3	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	$i_{col}$

Rysunek 7: Values of electrostatic potential  $V_{(x,y)}$  in sample mesh XY type D



$i_{row}$									
10	72	73	74	75	76	77	78	79	
9	64	65	66	67	68	69	70	71	
8	56	57	58	59	60	61	62	63	
7	48	49	50	51	52	53	54	55	
6	40	41	42	43	44	45	46	47	
5	32	33	34	35	36	37	38	39	
4	24	25	26	27	28	29	30	31	
3	16	17	18	19	20	21	22	23	
2	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	
	1	2	3	4	5	6	7	8	$i_{col}$

Rysunek 8: Indices in sample mesh XY type D (ANSI C)

232      Size of mesh (number of rows and columns) is:

233    `size_row == 10`

234    `size_col == 8`

235      We can have access to each node if we know its row and column: We can  
236    determine its index (let's name it `icp` (index if „central” point)).

237    `icp = (i_row - 1) * size_col + i_col - 1`

238      where

239    `i_row == 1, 2, ..., size_row`

240    `i_col == 1, 2, ..., size_col`

241      For example, if we want to set voltage of node with index `icp`, to 1.0 Volt,  
242    we can do it using pointer notation:

```
243 double* ptr_V is pointer to voltage mesh
244 *(ptr_V + icp) = +1.0;
```

## Literatura

- [1] W. community, "Prawo\_gaussa\_(elektryczność)," 2024.
- [2] J. R. Nagel, "Solving the generalized poisson equation using the finite - difference method (fdm).," 2012.
- [3] W. community, "Prawo\_gaussa\_(elektryczność)," 2024.
- [4] W. community, "Dywergencja," 2024.
- [5] P. Grivet, *Electron Optics, Second (revised) English edition*. Pergamon Press Ltd., 1972.
- [6] A. Septier(ed.), *Focusing of Charged Paticles*. New York and London, Academic Press, 1967.
- [7] A. Septier(ed.), *Applied Charged Paticle Optics, part A*. New York and London, Academic Press, 1980.
- [8] D. W. O. Heddle, *Electrostatic Lens Systems. Second Edition*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000.
- [9] B. Paszkowski, *Optyka Elektronowa, wydanie II, poprawione i uzupełnione*. Państwowe Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa, 1965.
- [10] B. Paszkowski, *Electron Optics [by] B.Paszkowski. Translated from the Polish by George Lepa. English translation edited by R. C. G. Leckey*. London, Iliffe; New York, American Elsevier Publishing Company Inc., 1968.