

dr hab. Tomasz Kochanek
 Instytut Matematyki
 Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
 Uniwersytetu Warszawskiego

**Recenzja rozprawy doktorskiej
 pani mgr Agnieszki Gergont**

pt. *O izomorfizmach i izomorficznych
 włożeniach pomiędzy
 L_1 -predualnymi. Zastosowania.*

1. TEMATYKA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Tematyka rozprawy doktorskiej pani mgr Agnieszki Gergont skupiona jest wokół zagadnienia szacowania dystorsji izomorficznych zanurzeń przestrzeni Banacha oraz szacowania odległości Banacha-Mazura między izomorficznymi przestrzeniami Banacha, które to zagadnienie jest klasyczną i istotną częścią ogólnej izomorficznej teorii przestrzeni Banacha. Doktorantka szczególną uwagę poświęca badaniu specjalnych klas przestrzeni Lindenstraussa, tj. takich przestrzeni Banacha X , dla których X^* jest izometrycznie izomorficzna z $L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ . Wyniki zaprezentowane w rozprawie dotyczą w szczególności następujących klas przestrzeni: podklas M -przestrzeni i G -przestrzeni klasy $C_0(K)$ przestrzeni funkcji ciągłych znikających w nieskończoności na pewnej lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa K , klasy przestrzeni $A(S)$ afinicznych funkcji ciągłych na sympleksie Choqueta S , ℓ_1 -predualnych hiperpłaszczyzn przestrzeni c ciągów zbieżnych, jak również ich c_0 -sum prostych w wersji skończonej bądź nieskończonej. Warto zaznaczyć, że dość kluczowym warunkiem, przewijającym się w całej rozprawie, jest pewne ograniczenie na zbiór $(\text{ext} B_{X^*})'$ złożony z $*$ -słabych punktów skupienia zbioru punktów ekstremalnych kuli jednostkowej X^* (czyli pochodną Cantora-Bendixsona zbioru $\text{ext} B_{X^*}$ rozumianą względem $*$ -słabej topologii). Podstawową wersją takiego warunku jest inkluzja

$$(*) \quad (\text{ext} B_{X^*})' \subseteq r B_{X^*} \quad \text{dla pewnego } r \in [0, 1);$$

jest to warunek zaproponowany przez Fonfa i Veselý'ego (*Canad. J. Math.* 2004). W innej wersji autorka rozprawy rozważa wielkość $r^*(X)$ zdefiniowaną jako infimum liczb $r > 0$ spełniających powyżej przytoczony warunek, i pokazuje jej ilościowe związki z odległościami Banacha-Mazura oraz stabilnością $*$ -słabej własności punktu stałego. Można powiedzieć, że tego typu warunki na wspomnianą pochodną Cantora-Bendixsona oraz ich związki z wielościennością i oszacowaniami dystorsji izomorficznych zanurzeń są tematem przewodnim recenzowanej pracy.

Rozprawa oparta jest na dwóch artykułach naukowych napisanych przez doktorantkę wspólnie z promotorem rozprawy, panem dr. hab. Łukaszem Piaseckim, a także na szeregu nieopublikowanych jeszcze autorskich wyników uzyskanych przez panią mgr Gergont. Wspomniane artykuły opublikowane zostały w *J. Math. Anal. Appl.* oraz *Colloq. Math.* czyli dobrych i rozpoznawalnych w skali międzynarodowej czasopismach. Oświadczenia obojga współautorów potwierdzają istotny wkład doktorantki w powstanie obydwu artykułów.

2. GŁÓWNE TEZY ROZPRAWY

Pierwsze dwa rozdziały rozprawy zawierają obszerne wprowadzenie do tematu i podsumowanie znanych wyników. W rozdziale pierwszym dość dokładnie omówione są własności pewnej szczególnej klasy ℓ_1 -predualnych hiperpłaszczyzn przestrzeni c , które były badane przez Casiniego, Miglierinę i Piaseckiego. Klasa ta, oznaczana symbolem $\mathcal{H}$, jest całkiem bogata, bowiem zawiera przestrzenie niebędące G -przestrzeniami, M -przestrzenie niebędące postaci $C_0(K)$, jak również przestrzenie L_1 -predualne nienależące do żadnej z klas $C(K)$, $A(S)$, M oraz G .

Rozdział drugi zawiera zestawienie i omówienie najważniejszych znanych wyników dotyczących odległości Banacha-Mazura między L_1 -predualami, m.in. klasycznych wyników Amira i Camberna, a także opublikowanych w latach 2012-13 wyników Candido i Galego dotyczących oszacowań odległości między przestrzeniami c_0 i c (bądź ich izomorficznymi zanurzeniami) a przestrzeniami postaci $C([0, \alpha])$ dla przeliczalnych liczb porządkowych α . Omówione są też tutaj wyniki uzyskane przez Piaseckiego, które dotyczą charakterystyki przestrzeni prawie izometrycznych z przestrzeniami klasy $\mathcal{H}$.

Rozdział trzeci zawiera wyniki opublikowane przez doktorantkę wspólnie z promotorem w dwóch artykułach:

- [29] A. Gergont, Ł. Piasecki, *On isomorphic embeddings of c into L_1 -preduals and some applications*, J. Math. Anal. Appl. 492 (2020), 124431,
- [30] A. Gergont, Ł. Piasecki, *Some topological and metric properties of the space of ℓ_1 -predual hyperplanes in c* , Colloq. Math. 168 (2022), 229–247.

Pierwszym głównym wynikiem tego rozdziału jest pochodzące z pracy [29] twierdzenie 3.1.3 podające dolne oszacowanie dystorsji izomorficznego włożenia c w X dla nieskończonego wymiarowej L_1 -predualnej przestrzeni X spełniającej warunek (*). Rezultat ten, jak pokazuje autorka rozprawy, pozostaje w mocy jeżeli zastąpimy przestrzeń c przestrzenią zawierającą jej prawie izometryczne kopie, np. nieskończone wymiarową przestrzenią typu $A(S)$. Dowodzone dalej twierdzenie 3.2.1 pochodzące z pracy [30] jest naturalnym i opartym na podobnych pomysłach uogólnieniem twierdzenia 3.1.3. Jest ono jednak przydatne do uzyskania pewnych oszacowań na długość krzywej łączącej dwie klasy abstrakcji w przestrzeni metrycznej $(\mathcal{H}/\sim, d_{\mathcal{H}/\sim})$, które pojawiają się w rozdziale czwartym. Interesujący jest przykład 3.2.4, który nie tylko pokazuje, że oszacowanie z twierdzenia 3.2.1 jest optymalne, ale także pozwala podać przykłady par dwóch różnych ℓ_1 -predualnych przestrzeni z klasy $\mathcal{H}$, z których obie są M -przestrzeniami, ale nie $C_0(K)$ -przestrzeniami, i dla których mamy dokładne wzory na odległości Banacha-Mazura. Dalej autorka pokazuje jak wzory te można uogólnić w języku wielkości $r^*(X)$ w sytuacji, gdy rozważamy c_0 -sumy proste wspomnianych przestrzeni. Rozdział kończy się dowodem twierdzenia 3.3.1 – jeszcze nieopublikowanego w trakcie pisania rozprawy, a które obecnie można już znaleźć w pracy:

- A. Gergont, *A note on the Banach–Mazur distances between c_0 and other ℓ_1 -preduals*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 76 (2022), 25–30,

i które podaje eleganckie oszacowanie dolne, w języku parametru $r^*(X)$, odległości Banacha-Mazura między c_0 a jej izomorficzną ℓ_1 -predualną kopią. Twierdzenie to jest zasadniczo oparte na twierdzeniu 3.2.1 uzyskanym przez doktorantkę wspólnie z Ł. Piaseckim, jednak dowód wymagał pewnej dodatkowej technicznej biegłości.

Najdłuższy ostatni rozdział rozprawy, zgodnie z jego tytułem, można traktować jako prezentację zastosowań wyników z rozdziału trzeciego. Zawiera dyskusję problemu stabilności dla następujących trzech własności: wielościenności, własności przedłużania operatorów zwartych oraz $*$ -słabej własności punktu stałego, jak również pewne wyniki dotyczące topologicznych i metrycznych własności przestrzeni $(\mathcal{H}/\sim, d_{\mathcal{H}\sim})$. Stabilność wielościenności jest prostą konsekwencją twierdzenia 3.1.3 oraz charakterystyki wielościennych przestrzeni Lindenstraussa jako tych, które nie zawierają izometrycznej kopii c , co jest wynikiem pochodzącym od Casiniego, Miglieriny, Piaseckiego i Veselý'ego. Jeśli chodzi o charakterystykę własności rozszerzania dla operatorów zwartych (WROZ), to głównymi wynikami rozprawy są twierdzenia 4.2.6 i 4.2.8 (z pracy [29]). Pierwsze z nich podaje ładną charakterystykę WROZ przez postać przestrzeni dualnej $X^* = \ell_1(\Gamma)$ oraz, przykładowo, niezawieranie izometrycznej kopii żadnej hiperpłaszczyzny z klasy $\mathcal{H}$, do której należy element $(1, 1, \dots) \in c$. Drugie otrzymujemy przez połączenie kilku wcześniejszych rezultatów, i mówi ono, że WROZ jest stabilna w klasie L_1 -preduali przy założeniu warunku $(*)$.

Wyniki z pracy [30] zawarte w dalszej części rozdziału opisują przestrzeń metryczną warst hiperpłaszczyzn z $\mathcal{H}$ z różnych punktów widzenia. Podany jest m.in. dosyć złożony w dowodzie, ale elegancki w wypowiedzi topologiczny opis przestrzeni $(\mathcal{H}/\sim, d_{\mathcal{H}\sim})$ w postaci pewnego podzbioru kuli jednostkowej ℓ_1 (twierdzenie 4.3.1). Przedstawiona zostaje także optymalna homotopia ściągająca $\mathcal{H}/\sim$ do $[c_0]_\sim$, której optymalność polega na tym, że generuje ona najkrótsze drogi łączące dowolną warstwę $\mathcal{H}/\sim$ z $[c_0]_\sim$. Przedstawione są również wzory na długości najkrótszych dróg łączących niektóre pary warst. Następnie doktorantka podaje analogony tego typu rezultatów, będące w zasadzie głównie wynikami rachunkowymi, dla klasy $\mathcal{F}$ złożonej z c_0 -sum prostych hiperpłaszczyzn z $\mathcal{H}$.

W ostatniej części rozdziału czwartego doktorantka dowodzi twierdzenia 4.4.18 (z pracy [29]), które podaje wzór na stałą mierzącą „efekt stabilności” dla $*$ -słabej własności punktu stałego przestrzeni z klasy $\mathcal{H}$. Podaje ona także analogon tego twierdzenia (twierdzenie 4.4.19) dla przestrzeni z klasy $\mathcal{F}$. Podobne rozumowanie pozwala na podanie wzoru na stałą stabilności rozumianej w języku najkrótszej krzywej łączącej dwie warstwy przestrzeni $\mathcal{F}/\sim$, z których jedna wyznaczona jest przez przestrzeń $X \in \mathcal{F}$ taką, że ℓ_1 ma prawie stabilną $*$ -słabą (w sensie predualu X) własność punktu stałego. Te ostatnie wyniki nie są jeszcze opublikowane.

3. OCENA ROZPRAWY

Zawartość merytoryczną pracy oceniam wysoko i sądzę, że prezentuje ona poziom odpowiedni dla rozprawy doktorskiej z matematyki. Omówione w niej nowe wyniki nie wymagają może szczególnie nowatorskich technik dowodowych, ale być może wynika to po prostu z faktu, że studiowane zagadnienia takich nie wymagają. Nie umniejsza to ocenie zaprezentowanych w rozprawie wyników, które są nietrywialne, podążają w naturalnym kierunku i stanowią interesujący wkład w izomorficzną teorię przestrzeni Banacha. Tyczy się to wyników już opublikowanych w [29] i [30], jak też kilku wartościowych wyników nieopublikowanych, które z pewnością stanowią materiał na kolejną publikację. Rozpiętość dorobku naukowego doktorantki oceniam zatem pozytywnie.

Rozprawa niewątpliwie pokazuje szerokie rozeznanie pani mgr Gergont w dziedzinie badania dystorsji izomorficznych zanurzeń i odległości Banacha-Mazura między przestrzeniami Banacha. Udowodniła ona, że potrafi w sposób pomysłowy i owocny czerpać z całkiem szerokiego arsenału technik dowodowych. Przykładowo, idea dowodu ważnego twierdzenia 3.1.3 jest, jak sama autorka przyznaje, oparta na modyfikacji dowodu klasycznego wyniku Camberna mówiącego, że $d(c_0, c) = \ln 3$, jednak poszczególne kroki wymagały nietrywialnych

modyfikacji i zostały one klarownie wyjaśnione w rozprawie.

Wartościowy jest też przykład 2.1.12 autorstwa pani mgr Gergont, który pokazuje, że odległość Banacha-Mazura pomiędzy przestrzeniami $c \cong C([1, \omega])$ a $C([1, \omega 3])$ jest mniejsza niż $\ln 4$, co jest pewnym przyczynkiem w kierunku rozstrzygnięcia hipotezy postawionej przez Candido i Galego. Podane oszacowanie (dokładnie: przez liczbę $\ln 3,9635592$) otrzymano, jak pisze autorka, za pomocą „eksperymentu komputerowego”. Można się domyślać, że w pewnej specyficznej klasie izomorfizmów z $C([1, \omega 3])$ na $C([1, \omega])$, które były analizowane przez program komputerowy podczas owego „eksperymentu”, wybrano optymalny układ współczynników, który zaprowadził do najsilniejszego oszacowania. Zadanie to przypomina nieco problem z programowania liniowego. Trochę szkoda, że autorka rozprawy nie dodała komentarza na temat tego, czy w jakiejś klasie kontrprzykładów uzyskane oszacowanie jest najlepsze, przynajmniej według komputera.

Może odrobinę brakuje w całej rozprawie odwołania, choćby informacyjnego, do lokalnej teorii przestrzeni Banacha, jak np. do związku między predualami L_1 a klasą Lindenstraussa przestrzeni należących do klasy $\mathcal{L}_{\infty, 1+\varepsilon}$ dla każdego $\varepsilon > 0$ (zdefiniowanych w języku lokalnym), choć faktem jest, że charakterystyka podana przez Lazara i Lindenstraussa została wspomniana na stronie 14. Jest to raczej uwaga marginalna odnosząca się do całościowego ujęcia tematu, a nie wyników samej autorki.

Rozprawa jest bardzo dobrze napisana i zredagowana, a jej lektura jest dużą przyjemnością. Praca pani mgr Gergont nie tylko w sposób przejrzysty prezentuje jej własne wyniki, wraz z wszelkimi szczegółami technicznymi, ale stanowi też wartościowe kompendium wiedzy z zakresu oszacowań dystorsji i odległości Banacha-Mazura. W szczególności cenne są poglądowe omówienia różnych technik dowodowych, co widać w rozdziale drugim, gdzie autorka omawia klasyczne twierdzenia Camberna i Gordona, jak również najnowsze wyniki należące do Candido, Galego i Piaseckiego. Umiejętność klarownego i całościowego ujęcia tematu świadczy o dużej kulturze matematycznej autorki i świetnym rozeznaniu w tematyce rozprawy. Usterki redakcyjne czy literówki są bardzo nieliczne i drugorzędne; wymienilibym jedynie brak logarytmu w wierszu 17, str. 19 oraz wierszach 1–2, str. 20, literówkę w nazwisku E. Miglieriny na str. 11 oraz symbol ρ zamiast używanego w dalszej części tekstu d w definicji na str. 45. Wprowadzona na str. 42 terminologia „*fejs*” wydaje mi się odrobinę ekstrawagancka. Myślę, że lepiej było użyć terminu „*zbiór ekstremalny*”, który pojawia się dokładnie w tym samym kontekście w polskim tłumaczeniu klasycznego podręcznika W. Rudina *Analiza funkcjonalna*.

4. KONKLUZJA

Uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska pani mgr Agnieszki Gergont zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz spełnia wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, jak i wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pani mgr Agnieszki Gergont do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Tomasz Kochanek