Politechnika Łódzka

Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
tel. kontaktowy: 602 730 893

Łódź, 2 stycznia 2023 r.

Opinia o doktoracie p. mgr Agnieszki Gergont
O izomorfizmach i izometrycznych włożeniach pomiędzy L_1-predualnymi. Zastosowania.

Przedstawiona rozprawa doktorska pani mgr Agnieszki Gergont została wykonana na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie, a jej promotorem jest pan dr hab. Łukasz Piasecki. Rozprawa liczy 68 stron; składa się ze strony tytułowej, wstępu wraz z dedykacją, czterech rozdziałów, bibliografii obejmującej 62 pozycje i spisu treści. W dużej części rozprawa bazuje na dwóch dobrze opublikowanych pracach [29] i [30] (numeracja zgodna z podaną w rozprawie), których A. Gergont jest współautorką, lecz zawiera również kilka nowych, jeszcze nie opublikowanych wyników.

W pierwszej części recenzji omówię problematykę rozprawy; w części drugiej przedstawię uwagi dotyczące kwestii redakcyjnych i merytorycznych, zaś w podsumowaniu sformułuję ostateczną konkluzję.

Część pierwsza (zawartość rozprawy): Rozprawa pani Gergont dotyczy ważnego zagadnienia w teorii przestrzeni Banacha, a mianowicie tzw. *przestrzeni Lindenstraussa* (lub *przestrzeni L^1-predualnych*) i, w szczególności, przestrzeni ℓ^1-predualnych. Rzeczywista przestrzeń Banacha X jest *L^1-predualna* jeżeli przestrzeń z nią sprzężona X^* jest przestrzenią Lebesgue'a $L^1(\Omega, \mu)$ dla pewnej przestrzeni z miarą (Ω, μ) (oczywiście z dokładnością do izometrycznego izomorfizmu). Zainteresowanie takimi przestrzeniami wynika z faktu, że przestrzenie L^1-predualne nie są wyznaczone jednoznacznie (ponownie chodzi jednoznaczność z dokładnością do izometrii), np: $c_0^* = \ell^1 = c^*$. Rodzi to szereg pytań dotyczących związków między przestrzeniami L^1-predualnymi, ich klasyfikacji, a także własności topologicznych i geometrycznych przestrzeni dualnej wrażliwych na wybór predualnej i jej strukturę. Badania nad przestrzeniami L^1-predualnych zapoczątkował A. Grothendieck, były także przedmiotem zainteresowania wielu znanych matematyków, w szczególności Lindenstraussa, Wojtaszczyka i wielu innych, Gleita, Alspacha i innych. Teoria przestrzeni Lindenstraussa i problematyka pokrewna budziła i nadal budzi wiele zainteresowania i inspiruje do badań.

Pracę p. Gergont rozpoczyna dość długi, przeładowany informacjami wstęp, w którym autorka szczegółowo omawia przedmiot rozprawy i jej zawartość, a także podstawową terminologię i oznaczenia. Czyni to w bardzo profesjonalny i wyczerpujący sposób, jednak lektura wstępu nie jest łatwa, a informacje tam zawarte są chyba częściowo zbędne, gdyż te potrzebne dla toku rozumowania ponownie pojawiają się w dalszych częściach pracy. W pierwszym rozdziale autorka zwięźle przedstawia przedmiot swych badań, tj. przestrzenie Lindenstraussa, ich przykłady (a raczej klasy takich przestrzeni) i konwencje terminologiczne. Fakty tu zgromadzone i sposób ich prezentacji uznaję za popis erudycji autorki: bez wątpienia panuje ona świetnie nad tą tematyką i dysponuje dużą szczegółową wiedzą. Obiekty tu omówione są niekiedy złożone i opanowanie ich wymaga cierpliwości i sprawności technicznej. Czytelnik nieobyty na codzień z wszystkimi niuansami i „smaczkami" teorii, patrzący z dystansu (tak, jak piszący te słowa recenzent) może mieć jednak poczucie pewnego eklektyzmu. Autorka podaje wiele definicji, faktów i związków miedzy omawianymi obiektami, lecz ilość trochę zmniejsza przekonanie o znaczeniu tych wyników. Podobny charakter ma drugi rozdział, w którym omówiono kwestie związane z *odległością Banacha-Mazura* pomiędzy izomorficznymi przestrzeniami Banacha oraz tzw. *dystorsją* (izomorficznego) *włożenia*. Tu również autorka podaje szereg klasycznych wyników, a także tych mniej klasycznych, np. bardzo interesujących przykładów i uwag promotora o zachowaniu odległości Banacha-Mazura w klasie $\mathcal{H}$ tzw. ℓ^1-predualnych hiperpłaszczyzn w przestrzeni c ciągów zbieżnych (tu autorka wspomina o swym udziale w tych zagadnieniach opublikowanym w pracy [30]).

Zasadniczą zawartość rozprawy doktorskiej p. A. Gergont rozpoczyna rozdział trzeci, w którym bada oszacowania z dołu dystorsji włożeń przestrzeni c, lub ℓ^1-predualnych hiperpłaszczyzn z klasy $\mathcal{H}$, w przestrzeń L^1-predualną X, dla której zbiór słabych*-punktów skupienia zbioru punktów ekstremalnych domkniętej kuli jednostkowej B_{X^*} w przestrzeni dualnej jest zwarty „głęboko" w B_{X^*}, tzn. w kuli o promieniu $0 \leq r < 1$, tzn. $\big(\mathrm{ext} B_{X^*}\big)' \subset rB_{X^*}$. Pojawiają się tutaj wyniki opublikowane w pracach [29] i [30], tzn. przede wszystkim twierdzenie 3.1.3 o włożeniach c w X, a także jego drobne uogólnienie na przypadek włożeń w X przestrzeni prawie izometrycznych z c (Wniosek 3.1.5). Okazuje się, że oszacowanie dystorsji włożenia wynosi $(3-r)(1+r)^{-1}$ i jest *optymalne*, na co wskazuje podany nietrywialny przykład 3.1.9. W dalszym ciągu udowodniono twierdzenie 3.2.1 o dystorsji włożeń hiperpłaszczyzn z klasy $\mathcal{H}$ w X, gdzie dolne oszacowanie oraz parametr r zależą od hiperpłaszczyzny. Dowody obu wymienionych twierdzeń są dalece nietrywialne, technicznie złożone i pomysłowe, czego bynajmniej nie umniejsza (wspomniane zresztą przez autorkę) pewne podobieństwo do idei z pracy Camberna. Należy też podkreślić, że wynikom abstrakcyjnym towarzyszą dobrze dobrane przykłady i wnikliwe konstrukcje wskazujące na optymalność oszacowań (np. wspomniany przykład 3.1.9, przykład 3.2.4), a także konsekwencje w odniesieniu do odległości Banacha-Mazura pewnych przestrzeni z rozważanych klas, np. wniosek 3.2.8. Ostatnim rezultatem tego rozdziału jest (nieopublikowane jeszcze, a bardzo ładne) twierdzenie o oszacowaniu dolnym odległości Banacha-Mazura dowolnej izomorficznej z c_0 ℓ^1-predualnej przestrzeni Banacha X od c_0. Oszacowanie to jest także optymalne, a zależy od liczbowej charakterystyki $r^*(X)$ będącej miarą wspomnianego wyżej zanurzenia słabego* domknięcia punktów ekstremalnych.

Kolejnym rozdziałem zawierającym wyniki pracy badawczej p. Gergont jest rozdział czwarty. Przedmiotem jej rozważań jest *stabilność* określonych własności strukturalnych i geometrycznych przestrzeni L^1-predualnych, rozumiana jako „niewrażliwość" ze względu na małą „perturbację" w sensie odległości Banacha-Mazura, a wyniki pochodzą ponownie z prac [29] i [30]. W tym kontekście pojawia się obserwacja z wniosku 4.1.3 dotycząca warunku dostatecznego wielościenności przestrzeni L^1-predualnych wyrażonego w języku odległości od przestrzeni X spełniającej założenie z twierdzenia 3.1.3. Następnie autorka bada własność sformułowaną przez Lindenstraussa, tzw. *własność rozszerzania operatorów zwartych*. Uzyskuje mianowicie twierdzenie 4.2.6 (i ciekawy wniosek w twierdzeniu 4.2.8), w którym podaje szereg warunków równoważnych tej własności. Rezultat ten jest istotnym uzupełnieniem twierdzenia Lindenstraussa orzekającego, że (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń Banacha ma własność rozszerzania operatorów zwartych wtedy i tylko wtedy, gdy jest wielościenną przestrzenią L^1-predualną.

Bardzo ciekawy jest podrozdział 4.3 rozprawy. W tym miejscu doktorantka zajmuje się wprowadzoną przez swego promotora (i zdefiniowaną w rozdziale 2) przestrzenią metryczną $\mathcal{H}/\sim$. Otóż odległość Banacha-Mazura nie jest metryką; jest ona raczej *pseudometryką* (oczywiście w zbiorze przestrzeni Banacha modulo izomorficzna izometria), tzn. przestrzenie izomorficzne o zerowej odległości Banacha-Mazura nie muszą być izometryczne. To spostrzeżenie odnosi się również do klasy $\mathcal{H}$. Postępując standardowo, tzn. utożsamiając przestrzenie z klasy $\mathcal{H}$ odległe (w sensie Banacha-Mazura) od siebie o 0 otrzymuje się właśnie przestrzeń metryczną $\mathcal{H}/\sim$ indukowaną przez pseudometrykę Banacha-Mazura. Okazuje się (twierdzenie 4.3.1), że jest ona homeomorficzna (a nawet w pewnym technicznym sensie izometrycza) z przestrzenią nierosnących ciągów z ℓ^1 o normie ≤ 1. Ten strukturalny wynik opiera się na nietrywialnym, eleganckim rozumowaniu analitycznym; to na prawdę ładny kawałek delikatnej i skomplikowanej matematyki. Przestrzeń $\mathcal{H}/\sim$ jest *ściągalna* do klasy abstrakcji przestrzeni c_0 (c_0 jest hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez formę zerową), a homotopia ściągająca działa „po promieniach". To jest dość oczywiste, lecz w twierdzeniu 4.3.9 autorka przytacza rezultat (z pracy [30]) dotyczący długości tych „promieni" oraz ich lipschitzowości. Ten i inne pokrewne wyniki dotyczące długości ścieżek łączących punkty z przestrzeni $\mathcal{H}/\sim$, a także wyniki autorki jeszcze nie opublikowane, ponownie świadczą o dużej biegłości technicznej autorki i otwierają, zdaniem recenzenta, ciekawe „nieliniowe" perspektywy badawcze. Są to wyniki strukturalne, gdyż dają informację nie tylko o odległości Banacha-Mazura „punktów" z $\mathcal{H}/\sim$, lecz o także długości dróg je łączących.

Ostatnią z badanych własności przestrzeni z rozważanych klas jest (co należy zresztą do swoistego *spécialité de la maison* lubelskiej szkoły geometrii przestrzeni Banacha) własność punktu stałego, a dokładniej mówiąc *słaba* własność punktu stałego* (*-WPS), przy czym chodzi o punkty stałe odwzorowań nieoddalających określonych na wypukłych $\sigma(X^*, X)$-zwartych podzbiorach przestrzeni dualnej X^*. Autorka przytacza dużą liczbę faktów dotyczących *-WPS dla ogólnych przestrzeni Banacha, lecz swoją uwagę skupia na przestrzeniach ℓ^1-predualnych, a dokładniej mówiąc na stabilności tej własności w klasach $\mathcal{H}$ i $\mathcal{F}$ (gdzie $\mathcal{F}$ jest klasą – odpowiednio rozumianych – sum prostych hiperpłaszczyzn z $\mathcal{H}$). Okazuje się, że w wielu przypadkach, dla ustalonej ℓ^1-predualnej przestrzeni X mającej *-WPS, można dokładnie oszacować i/lub obliczyć stałą $\eta^*(X)$ taką, że jeśli przestrzeń Y jest ℓ^1-predualna o odległości Banacha-Mazura od X nie większej niż $\eta^*(X)$, to Y^* ma *-WPS. Idąc dość przetartym przez promotora szlakiem w twierdzeniach 4.4.18 i 4.4.19 autorka wyliczyła tę stałą w sytuacji, gdy przestrzenie o których mowa są w klasach $\mathcal{H}$ lub $\mathcal{F}$, a więc gdy $X, Y \in \mathcal{H}$ lub $\mathcal{F}$. Wreszcie ostatnie wyniki rozprawy p. Gergont dotyczą podobnej sytuacji w odniesieniu do wspomnianej wyżej przestrzeni $\mathcal{H}/\sim$ lub $\mathcal{F}/\sim$ z metryką "długości ścieżek".

Część druga (ocena merytoryczna): Przedstawiona praca doktorska mgr. Agnieszki Gergont stanowi przykład solidnego rzemiosła matematycznego w dziedzinie nowoczesnej teorii geometrii przestrzeni Banacha. Wyniki w niej zaprezentowane (otrzymane we współpracy z promotorem lub samodzielne) należą do tzw. *frontline of research* i wpisują się mocno we wcześniejsze badania promotora opublikowane w licznych, na ogół współautorskich, pracach. Można powiedzieć, że większość rezultatów rozprawy ma charakter uzupełnień wyników wcześniejszych lub kontynuacji wcześniejszych badań. Promotor rozprawy jest bez wątpienia jednym z najlepszych specjalistów w zakresie przestrzeni Lindenstraussa, a jego podopieczna dzielnie sekunduje mu w bardzo ekstensywnych badaniach w tej dziedzinie osiągając szereg złożonych technicznie szczegółowych wyników, mających często charakter optymalny, co potwierdzają niebanalne przykłady. Są to więc wyniki nie tylko jakościowe, lecz często ilościowe, co dobrze wpisuje się w ostatnio modny nurt tzw. *quantitative Banach space geometry.* Autorka jest doskonale obyta w literaturze dotyczącej przedmiotu swych zainteresowań, dysponuje dużą kulturą matematyczną, co jest odzwierciedlone staranną redakcją tekstu (nie zauważyłem praktycznie żadnych usterek literowych, co jest na prawdę rzadkim ewenementem), dojrzałym i swobodnym językiem, przejrzystą terminologią oraz właściwym układem pracy. Autorka pokazała sporą biegłość i talent w prowadzeniu nietrywialnych i technicznie złożonych rozumowań oraz w konstrukcji przykładów ilustrujących teorię i pojęcia.

Rozprawa p. Gergont nie zawsze jednak jest łatwa w czytaniu. Matematyka na ogół nie jest łatwa dla czytelnika, ale w tym przypadku recenzent miał kilkakrotnie wrażenie, że erudycyjny (a czasem wręcz intensywnie przeglądowy) przekaz nie jest potrzebny i że nie zawsze ilość przechodzi w jakość. Myślę, że z części zaprezentowanych wyników (innych autorów) można by zrezygnować bez szkody na niezbędnych rozumowań, a z zyskiem dla przejrzystości. Miejscami też recenzentowi zabrakło motywacji dla podejmowanych zagadnień. Jest jasne, że praca doktorska p. Gergont ma charakter akademicki i tak, jak na pewne góry się wchodzi „bo są", tak i na pewne pytania się odpowiada „bo są". To jednak nie zmienia faktu, że dobrze jest w badaniach matematycznych mieć motywacje nie tylko akademickie.

W powyższym omówieniu zawartości pracy wskazałem na, moim zdaniem, najważniejsze wyniki pracy. Uważam, że na specjalną uwagę zasługują: twierdzenie 3.1.3 z pięknym dowodem (i towarzyszący mu przykład 3.1.9), bardzo solidne twierdzenie 4.2.6 o charakteryzacji przestrzeni mającej własność rozszerzania operatorów zwartych, a także (może przede wszystkim) zawartość podrozdziału 4.3 o przestrzeni $\mathcal{H}/\sim$ uzupełniony o twierdzenia 4.4.18 i 4.4.20.

Podsumowanie Należy stwierdzić, że praca doktorska mgr Agnieszki Gergont potwierdza jej dojrzałość matematyczną i wysokie kompetencje naukowe. Rozprawa prezentuje dobrą wiedzę autorki i jej umiejętność do samodzielnego prowadzenia badań. Przedmiotem rozprawy jest szereg ciekawych oryginalnych problemów, a uzyskane wyniki są oryginalne i wartościowe.

Biorąc pod uwagę powyżej sformułowane oceny i komentarze stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska p. mgr Agnieszki Gergont spełnia ustawowo i zwyczajowo stawiane wymagania. Wnoszę więc z pełnym przekonaniem o dopuszczenie rozprawy mgr Gergont do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Wojciech Kryszewski