

Zbigniew A. Łagodowski, dr hab.
Katedra Matematyki
Politechnika Lubelska

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Pawła Kurasińskiego
Dokładne prawa wielkich liczb i ich zastosowania

1. Wstęp

Rozprawa doktorska p. mgr. Pawła Kurasińskiego liczy 85 stron. Składa się ze wstępu oraz pięciu rozdziałów i bibliografii zawierającej 38 pozycji. Wyniki przedstawione w rozprawie są oparte na pięciu opublikowanych artykułach: [21] w *Applicationes Mathematicae*, [22] w *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, [25] w *Communications in Statistics – Theory and Methods*, [26] w *Statistics and Probability Letters* oraz [27] w *Bulletin Of The Institute Of Mathematics Academia Sinica. New Series*. Współautorem wszystkich prac jest promotor profesor Przemysław Matuła, w pracach [25-27] profesor André Adler a w pracy [27] Habib Naderi. Współpraca z André Adlerem to duża nobilitacja dla młodego matematyka. Profesor Adler to uznany autorytet w dziedzinie probabilistyki, wniósł ogromny wkład w rozwój dokładnych praw wielkich liczb. Doktorant, ponadto deklaruje, że w pracy przedstawione są jeszcze wyniki własne, dotąd nieopublikowane.

Pierwsza część wstępu zawiera wyjaśnienie kiedy prawa wielkich liczb niosą informację o asymptotyce sum zmiennych losowych a kiedy musimy badać sumy ważonych zmiennych losowych – i ta część teorii twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa nosi nazwę dokładnych praw wielkich liczb. Badanie właśnie tych praw jest przedmiotem rozprawy. Następnie doktorant dokonuje przeglądu literatury dotyczącej dokładnych praw wielkich liczb. Lista nie zbyt długa bo też tematyka jest całkiem "młoda". Początek dały prace m.in. Hsu i Robbinsa z 1961 i Mallera z 1978. Bardziej intensywne badania rozpoczęły się w latach 90-tych za sprawą. Adlera. W dalszej części wstępu następuje omówienie problemów rozważanych w poszczególnych rozdziałach. Ostatni fragment wstępu to przykłady ilustrujące dokładne prawa wielkich liczb. W przykładzie dotyczącym Paradoксу Petersburskiego definicja gry jest niespójna z wzorem (1), w którym ponadto jest błąd.

2. Omówienie rozprawy

Rozdział pierwszy pełni ważną rolę w całej rozprawie. Twierdzenia 1.3 do 1.5, dotyczące mocnego dokładnego prawa wielkich liczb (DPWL) są wykorzystywane w dowodach wyników prezentowanych w kolejnych rozdziałach. Twierdzenia 1.1 i 1.2 to znane DPWL dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach, otrzymane przez Adlera, opublikowane w pracy [2]. W rozprawie z nowymi oryginalnymi dowodami wykorzystującymi mocne prawo

wielkich liczb (MPWL) Jajtego z pracy [18] oraz pewne fakty z dowodu Adlera. W tezie obu twierdzeń brakuje wskazania rodzaju zbieżności, również w dowodach nie zawsze jest on określany. W dowodzie Twierdzenia 1.2 autor błędnie odwołuje się do dowodu Twierdzenia 1.5, chyba chodzi tutaj o Twierdzenie 1.1. Podrozdział 1.2 jest zatytułowany "Zbieżność prawie pewna", poprzedni podrozdział również omawia mocne DPWL i zdecydowana większość wyników rozprawy dotyczy zbieżności mocnej więc taki tytuł nie niesie ze sobą żadnej informacji o treści tego podrozdziału. W tej części rozprawy podane są mocne DPWL dla niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach, z założeniami na funkcje przeżycia – Twierdzenie 1.3 i na funkcję gęstości – Twierdzenie 1.4. Porównanie obu twierdzeń zamieszczone jest w Uwadze 1.1. Z rozumowania przeprowadzonego w uzasadnieniu wynika konkluzja dokładnie przeciwna do zamieszczonej w uwadze. Powinna ona brzmieć: Tw. 1.3 jest mocniejsze od Tw. 1.4. W kolejny podrozdziale autor przedstawia słabe DPWL dla nieujemnych, niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach – Twierdzenie 1.5. Założenia sformułowane dla funkcji przeżycia a dowód oparty na klasycznej idei badania zbieżności sum uciętych zmiennych losowych i faktach z pracy Adlera [6]. W dowodzie doktorant korzysta z Twierdzenia A.3 podającego charakterystykę funkcji wolno zmieniającej się. Moim zdaniem twierdzenie jest niepoprawnie sformułowane, można porównać z jego wypowiedzią w N. H. Bingham, Dr C. M. Goldie, J. L. Teugels - Regular variation, Theorem 1.3.5. W podrozdziale 1.4 autor przedstawia mocne DPWL dla zmiennych losowych, bez założeń o niezależności. Na początku przytacza założenia z pracy [10]. Zamierza je zastąpić założeniami sformułowanymi przez siebie, w szczególności Założeniem 1.4. Przykład 1.1 pokazuje, że Założenie 1.3 nie wynika z Założenia 1.4. Taka informacja niewiele mówi o Założeniu 1.4 w kontekście zastąpienia nim Założenia 1.3. Podsumujmy plany i ich realizację: wprawdzie Założenie 1.4 występuje w Lemacie 1.1 i 1.2 ale w deklarowanych przez doktoranta głównych wynikach podrozdziału – Twierdzeniach 1.6 i 1.7 widzimy Założenia 1.1, 1.2 i 1.3 – nie ma Założenia 1.4. Nie ma żadnej dyskusji, która objaśniałaby wcześniejszy komentarz w świetle otrzymanych wyników. Nie ma też umiejscowienia wyników w odniesieniu do stanu aktualnych badań. Sformułowania Założenia 1.3 i Lematu 1.1 są tak karkołomne, wielokrotne implikacje i równoważności – trudne do zaakceptowania. W Twierdzeniach 1.6 i 1.7 sformułowanie warunku dla ciągu (Y_n) sugeruje, że ma on spełniać Założenie 1.2 dla dowolnego ciągu funkcji (f_n) . W dowodzie jest zastosowany konkretny ciąg.

W Rozdziale 2 autor rozważa mocne DPWL dla ilorazów niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Stwierdza, że wyniki tego rozdziału uogólniają twierdzenia Adlera zawarte w pracy [6] i dotyczące mocnego DPWL dla niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na analogiczne DPWL dla niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie spełniających warunek "subekspozycyjności". Twierdzenie 2.1 jest wypełnieniem powyższej deklaracji. Dalej następują przykłady. Jednym z komentarzy do przykładów jest interesująca Uwaga 2.1, która pozwala zobaczyć stosowanie Twierdzenia 2.1 poza obszarem określonym przez założenia. Jak dla mnie sformułowanie mało komunikatywne i pozbawione konkretnego uzasadnienia. Następnie autor pokazuje, że zamiast warunku "subekspozycyjności" wystarczy aby ciągi niezależnych zmiennych losowych miały ten sam rozkład co całkowalna i nieujemna zmienna losowa posiadająca funkcję gęstości, która jest ograniczona i ciągła. Wówczas Twierdzenie 2.2, uogólniające Twierdzenie 2.1 jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 1.4. Przykład 2.11 pokazuje, że ciągłość funkcji gęstości nie jest konsekwencją jej ograniczoności - ten fakt chyba nie zaskakuje. Podrozdział 2.2 dotyczy

słabego DPWL, w którym Twierdzenie 2.3 zostało otrzymane z Twierdzenia 1.5.

W rozdziale trzecim autor przedstawia DPWL dla ilorazów statystyk porządkowych wyznaczonych z wierszy tablicy zmiennych losowych. Definicje statystyk podaje tylko dla pierwszego rzędu. Brak jest definicji ogólnej a przecież w rozprawie rozważane są również statystyki wyższych rzędów. Natomiast znajdujemy informacje dlaczego najmniejsze statystyki porządkowe nie spełniają MPWL. Dotychczas problem był rozważany dla szczególnych rozkładów i ograniczonych długości wierszy. Przed sformułowaniem pierwszego wyniku napotykamy komentarz "...w przypadku gdy $k_n = K$ (stała długość wierszy) możemy skorzystać z wyniku Adlera z [2]." – w tej pracy nie są rozważane ani ciągi statystyk porządkowych ani ilorazów zmiennych losowych. W Twierdzeniu 3.1 uwolnione zostało założenie o konkretnym typie rozkładu, tablica dodatnich, niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z ograniczoną funkcją gęstości f , ma stałą długość wierszy. W dowodzie ponownie ujawnia się moc Twierdzenia 1.3. W przypadku gdy $f(0) = 0$ wynik nie dostarcza asymptotyki. Dalej sformułowany jest główny wynik pierwszego podrozdziału – Twierdzenie 3.2, w którym następuje kolejna relaksacja założeń – o ograniczoności długości wiersza tablicy. Odrzucenie założenia o stałej długości wierszy powoduje, że rozkłady ilorazów najmniejszych statystyk porządkowych nie są jednakowe. Przewyciężenie tej trudności było możliwe dzięki założeniu (3.3) o zachowaniu się ogonów zmiennej losowej tworzącej tablicę. W dowodzie ponownie stosujemy Twierdzenie Lebesgue'a i Twierdzenia 1.3. W podrozdziale 3.2 badane jest DPWL dla ilorazów statystyk porządkowych wyższych rzędów otrzymanych z tablicy zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym. W podrozdziale 3.3 przy podobnych założeniach dowiedziono mocne DPWL dla $M_n = \max_{2 \leq k \leq k_n} R_{n,k}$, gdzie $R_{n,k}$ jest ilorazem sąsiednich statystyk porządkowych wyższych rzędów. Ponownie w dowodzie stosowano Twierdzenie 1.4. Wyniki uogólniają prace [32] i [9].

W rozdziale czwartym są omawiane mocne DPWL dla zmiennych losowych typu dwuogonowego Pareto, to znaczy spełniających warunek (4.3). Takie zmienne losowe są niecałkowalne a więc własności graniczne należy badać dla sum ważonych. Dalej autor stwierdza, że wyniki tego typu otrzymano jedynie dla dodatnich zmiennych losowych, nie podając dokładniejszych odniesień a cytowane prace [5] i [27] niezupełnie to potwierdzają. Ponownie Twierdzenie 1.3 i 1.5 pozwala otrzymać główne wyniki tego rozdziału: mocne DPWL i twierdzenie typu Bauma-Katza. Ten drugi wynik to wersja twierdzenia Adlera z pracy [1]. W następnym podrozdziale znajdujemy zastosowania uprzednio uzyskanych wyników do dowodu mocnego DPWL i twierdzenia typu Bauma-Katza dla ilorazów niezależnych zmiennych losowych.

W Rozdziale piątym autor mierzy się z twierdzeniami Chow-Robbinsa, stawiając sobie za cel uzyskanie analogonów dla pól losowych $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^d}$. W niewielu pracach zajmowano się tym problemem, zatem Twierdzenia 5.2 i 5.3 można uznać za pionierskie. Dowód Lematu 5.1 polega m.in. na zliczaniu pewnych prawdopodobieństw ogonowych. To technika znana od dawna ale po raz pierwszy spotkałem się z tak dobrą formalizacją zapisu przy pomocy wprowadzonej funkcji $\Lambda(\underline{n})$.

Uwagi ogólne

Ocena redakcji i edycji tekstu

1. Moje najpoważniejsze uwagi dotyczą redakcji tekstu rozprawy. Przede wszystkim wygląda na dosłowne tłumaczenie z tekstu angielskiego, który brzmi dziwnie, nie po polsku a czasami wręcz zmienia treść twierdzeń. O tym pisałem w trakcie omawiania wyników. Wielokrotnie powtarzane wyrazy obok siebie pokazują brak staranności pod tym względem. Takim rażącym przykładem jest tekst na stronie 17 od $l1^+$ do $l9^+$, trzy razy użyty zaimek "stąd" i raz "wtedy" na początku zdania. Wygląda to bardzo źle ale co najważniejsze zaimek przysłowny jest używany w zdaniach złożonych do otrzymania zdania podrzędnego. Autor zupełnie nie przestrzega tej zasady gramatyki. Po polsku mówimy i piszemy "...taka stała a , że ..." a nie "... stała a , taka że ...". Bardzo dużo języka potocznego na przykład: nasze twierdzenie, nasze założenie, nasz lemat i itp. Utkana jest tym cała praca.
2. Niezbyt staranna edycja tekstu, w wielu miejscach występują podzielone wzory z pojedynczymi symbolami matematycznymi.
3. Może raz a może dwa razy doktorant sformułował tezę przy użyciu precyzyjnych sformułowań logicznych: dla każdego ... istnieje... . To w połączeniu z uwagami zawartymi w punkcie 1 daje słaby obraz redakcji rozprawy.
4. Wygodnie jest i takie są zasady aby na początku każdego rozdziału (lub przynajmniej we wstępie) nastąpiła deklaracja autorska gdzie prezentowane wyniki w rozdziale zostały opublikowane. Raz na początku wstępu doktorant wymienia prace opublikowane.

Ocena merytoryczna

1. Stronę merytoryczną rozprawy trzeba ocenić bardzo dobrze. Teoria DPWL jest rozwijana przez wszystkie rozdziały, konsekwentnie i z dobrym widzeniem całości problemu. Praktycznie wszystkie wyniki są dyskutowane poprzez liczne przykłady do których formułowane są ważne Uwagi.
2. Mam szczególne uznanie dla wyników podrozdziałów 1.2–1.4. Możliwości zastosowania Twierdzeń 1.3 i 1.4 w teorii DPWL są niezwykle duże.
3. Bardzo dobrze oceniam też wyniki rozdziału trzeciego i czwartego – dokładne uzasadnienie podałem w omówieniu rozprawy.
4. Wyniki rozdziału piątego to jedne z pierwszych dotyczących DPWL dla pól losowych.
5. W mojej opinii trochę za mało komentarzy plasujących otrzymane wyniki w bieżącej literaturze.

Inne niektóre drobne uwagi

1. str.1 l11⁺ jest "...ukazanych w pracy..." to rusycyzm, nie używany w języku polskim,
2. str.3 l12⁻ brak definicji stałej $x(L)$, funkcja L pojawia na następnej stronie,
3. rozdział 4 jestem zwolennikiem tradycji i używania nieodmiennej formy nazwiska Pareto,
4. str.16 l2⁺ pojedynczy symbol nieskończoności jako część nierówności,
5. str.19 l10⁻ zbędny operator $\lim$ po ostatniej równości,
6. str.43 l11⁻ operator $\lim$ powinien zostać wzięty po $r \rightarrow \infty$,
7. str.43 l7⁺ "Weźmy wzór z artykułu [32] ze 400. strony..." – tak nie można pisać,
8. str.5 l3⁻ powinno być: ...z podrozdziału 4.1 dla ilorazów...

Konkluzja

Dorobek publikacyjny doktoranta oceniam dobrze, pięć artykułów opublikowanych w czasopiśmie o zasięgu nienarodowym jest tego potwierdzeniem. Współpraca z André Adlerem to duże osiągnięcie. Obraz rozprawy jest znacznie pogorszony z powodów wymienionych w punkcie "Uwagi ogólne". Szkoda, bo bardzo podoba mi się koncepcja rozprawy i jej spójność. Wprawdzie nie znajdujemy zaawansowanych lub nowych technik dowodowych ani potężnego aparatu matematycznego ale widać, że doktorant ma bardzo dobrą wiedzę i interpretację praw wielkich liczb i dokładnych praw wielkich liczb. Bardzo dobrze rozumie techniki dowodowe. Jestem pod dużym wrażeniem umiejętności dostrzegania istoty problemów i ich uogólniania przez wprowadzanie "mądrych/optimalnych" założeń. To pozwala łączyć i stosować różne wyniki, czasami bardzo odległe teoretycznie, do otrzymania nowych, istotnych w badanej dyscyplinie.

Podsumowując, uważam, że opiniowana rozprawa doktorska wypełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje o dopuszczenie mgr-a Pawła Kurasińskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Kierownik Katedry Matematyki

dr hab. Zbigniew Łagodowski