

wpłynęło 24.06.2022r.

dr hab.prof. UŚ Henryk Gacki
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Uniwersytet Śląski

Katowice, 15 maj 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Pawła Kurasińskiego

pt. Dokładne prawa wielkich liczb i ich zastosowania

Przedstawiona mi rozprawa dotyczy słabych i mocnych dokładnych praw wielkich liczb i powiązanych z nimi ciekawymi zastosowaniami. Rozprawa opiera się na pięciu współautorskich pracach: dwóch opublikowanych z prof. P. Matulą, dwóch opublikowanych z prof. P. Matulą i prof. A. Adlerem oraz jednej opublikowanej z prof. P. Matulą, prof. A. Adlerem i prof. H. Naderi. Ponadto w rozprawie doktorskiej Autor przedstawił również wyniki własne, dotąd nigdzie nieopublikowane. Badana w rozprawie tematyka jest trudna i wymaga dobrej zaawansowanej wiedzy z zakresu teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Dlatego dobrze, że Autor napisał coś w rodzaju monografii umożliwiającej zrozumienie przedstawionych wyników.

Rozprawa zaczyna się od ciekawego wstępu i skrótowego omówienia uzyskanych wyników jak i również motywacji, co zostało zrobione w sposób przejrzysty. W każdym rozdziale wprowadzone są podstawowe pojęcia i konstrukcje stosowane w pracy. Jest to ważne, bo bogata literatura (38 pozycji) byłaby trudna do pokonania dla recenzentów.

W rozdziale pierwszym rozpatrywane są mocne oraz słabe dokładne prawa wielkich liczb, ze zbieżnością prawie wszędzie (mocne DPWL) oraz według prawdopodobieństwa (słabe DPWL), dla niezależnych oraz zależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach. W przypadku niezależnych zmiennych losowych Doktorant przedstawił ciekawy, autorski sposób dowodzenia DPWL, wyników opublikowanych przez Adlera w [2]. Dokładniej zdefiniował miarę asymetrii zmiennej losowej X , jako współczynnik dany wzorem (1.4), a następnie wykorzystując jego własności oraz twierdzenie Jajtego przedstawił interesujące dowody dwóch DPWL, dla zmiennych losowych o różnych rozkładach. Pierwsze DPWL dotyczy przypadku, gdy wartość oczekiwana zmiennej losowej X jest równa 0, a drugie przypadku, gdy $EX = \infty$. W podrozdziale 1.2 Autor przedstawia mocne DPWL. Co prawda Twierdzenie 1.3 jest podobne do wyniku uzyskanego w pracy [25], ale istotna różnica polega na tym, że w pracy [25] w Twierdzenie 1.4 rozważania dotyczyły funkcji gęstości. Tę część rozdziału pierwszego Autor kończy ciekawym podsumowaniem dotyczącym faktu, że Twierdzenie 1.4 jest istotnie silniejsze od Twierdzenia 1.3. Równie

interesujący jest Wniosek 1.1, będący wersją Twierdzenia 1.4, w przypadku zmiennych losowych o jednakowych rozkładach typu Pareto. Kolejny podrozdział 1.3 poświęcony jest słabym DPWL, dla niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach, przy założeniach takich samych jak w Twierdzeniu 1.3. Przy czym, tym razem w dowodzie głównego Twierdzenia 1.5 wykorzystywany jest wynik z pracy Gut [17].

W ostatnim podrozdziale 1.4 tej części rozprawy rozpatrywane są DPWL dla zależnych zmiennych losowych. W związku z tym, brak założenia niezależności zmiennych losowych wymaga korzystania z innych narzędzi, niż te, które wykorzystywano w poprzedniej części. Techniki dowodowe zaproponowane w tej części do badania DPWL, pozwoliły na niewprowadzanie żadnych szczególnych założeń, dotyczących zależności zmiennych losowych. W szczególności w dowodach głównych wyników tego podrozdziału to znaczy Twierdzeniu 1.6 oraz Twierdzeniu 1.7. wykorzystano drugi lemat Borela-Cantelliego, nierówność Kołmogorowa dla momentów, twierdzenie Karamaty, czy też założenie 1.3 lub silniejsze 1.4. W innych pracach z tej tematyki założenie niezależności łagodzone jest na różne sposoby. Jednym z nich jest założenie niezależności par zmiennych losowych (jak w przypadku MPWL). Uważam, że ta część rozprawy jest bardzo ciekawa ze względu na techniki dowodowe zaproponowane przez Autora, które cechują się tym, że nie robił żadnych szczególnych założeń dotyczących zależności zmiennych losowych. Dzięki temu widać wyraźną różnicę pomiędzy DPWL dla zmiennych losowych zależnych i niezależnych.

W głównej części rozdziału 2 to znaczy podrozdziale 2.1 Autor przedstawia uogólnienie wyniku Adlera z pracy [6]. W swojej pracy Adler rozważał ilorazy zmiennych losowych o tych samych rozkładach jednostajnych. W pracy [25] wspomniany wynik został rozszerzony na zmienne losowe, spełniające łagodny warunek *subeksponencjalności*. Godnym uwagi jest fakt, że w rozdziale tym Autor przedstawia uogólnienie tego rezultatu, polegające na pominięciu założenia *subeksponencjalności*. Ponadto podaje dużo bardzo ciekawych przykładów obrazujących uniwersalność, jeśli chodzi o zastosowania udowodnionego w tej części twierdzenia 2.1. W drugiej części to znaczy podrozdziale 2.2 Doktorant przedstawia ciekawe zastosowania słabego DPWL dla rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, p]$ oraz przypadku rozkładu wykładniczego.

Rozdział trzeci poświęcony jest DPWL dla statystyk porządkowych, a dokładniej DPWL dla ilorazów statystyk porządkowych. W podrozdziale 3.1 badane są ilorazy dwóch najmniejszych statystyk porządkowych

$$R_n = \frac{X_{n,(2)}}{X_{n,(1)}},$$

co ma swoje uzasadnienie, ponieważ tylko ilorazy najmniejszych statystyk porządkowych, mają zawsze nieskończoną wartość oczekiwaną, przy założeniach zaproponowanych przez Autora (to znaczy, że: zmienne losowe w tablicy $(X_{n,k})_{n \in N, 1 \leq k \leq k_n}$ są dodatnie oraz mają jednakowy

rozkład o funkcji gęstości f i dystrybuancie F). Korzystając z wyniku z pracy [12], Doktorant dowodzi, że dla stałej długości wierszy w tablicy $k_n = K$, ciąg $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie, z funkcją przeżycia daną wzorem (3.2). Autor kończy powyższe rozważania częścią aplikacyjną, udokumentowaną dwoma ciekawymi przykładami 3.1 oraz 3.2.

W dalszej części podrozdziału 3.1, Doktorant przedstawia analogon Twierdzenia 3.1 w przypadku, gdy długości wierszy w tablicy dążą do nieskończoności. Rozważania dotyczące tej problematyki Autor uzupełnia ciekawym Przykładem 3.3 związanym ze standardowym rozkładem normalnym.

W podrozdziale 3.2 wykorzystując Twierdzenie 1.4, Doktorant pokazał, jak w sposób prostszy i ciekawszy można rozwiązać bardzo trudny problem, dotyczący ilorazów statystyk porządkowych związanych z rozkładem jednostajnym, który był rozważany w pracy [32]. Fakt ten świadczy, o dużej uniwersalności wyników zawartych w rozprawie doktorskiej.

W ostatnim podrozdziale 3.3 Autor przedstawia bardzo ciekawe uzupełnienie Twierdzenia 1 z pracy Adlera [9], które dotyczy statystyk porządkowych, związanych z rozkładem jednostajnym. Dokładniej Doktorant pokazał, że dla maksimum ilorazów sąsiednich statystyk porządkowych $R_{n,k} = X_{n,k}/X_{n,(k-1)}$, $k = 2, \dots, k_n$ w n -tym wierszu spełniony jest warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^n \frac{\lg^{\alpha} k}{k} M_k = \frac{1}{\alpha+2}, \text{ prawie pewnie (dla } \alpha > -2). \quad (1)$$

Wynik ten jest ciekawym uzupełnieniem twierdzenia z pracy Adlera w [9], ponieważ Adler udowodnił powyższe twierdzenie, przy założeniu, że długości wierszy w tablicy są jednostajnie ograniczone.

W przedostatnim rozdziale Autor zajmuje się badaniami związanymi z DPWL, dla niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie typu Pareto oraz asymetrycznym rozkładzie typu Cauchy'ego. Godnym podkreślenia jest fakt, że Autor pokazał uniwersalność udowodnionych we wcześniejszych rozdziałach twierdzeń, do badania ważonych sum ilorazów niezależnych zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze liczb rzeczywistych. Dokładniej wykorzystując wspomniane twierdzenia Doktorant przedstawił ciekawe autorskie wyniki to znaczy: Twierdzenie 4.1, Twierdzenie 4.2, Twierdzenie 4.3. Istota tych twierdzeń polega na tym, że zagadnienia przedstawione w nich dotyczyły zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze liczb rzeczywistych, a nie jak dotychczas jedynie nieujemnych zmiennych losowych. W ostatnim podrozdziale 4.2, znaczenie tych twierdzeń Autor dokumentuje stosownie dobranym przykładem ilorazów niezależnych zmiennych losowych, które przyjmują wartości w zbiorze liczb rzeczywistych.

W ostatnim rozdziale Doktorant zajmuje się DPWL dla pól losowych. Problematyka ta jest bardzo interesująca, ponieważ istnieje niewiele publikacji dotyczących tego zagadnienia.

Do bardziej znanych można zaliczyć artykuły [4] oraz [11], cytowane w tej rozprawie. Autorzy tych prac zakładali, że zmienna losowa X jest niecałkowalna i przypadek wielowymiarowy sprowadzali do jednowymiarowego. Z kolei Doktorant udowodnił DPWL dla pól losowych, przy założeniu, że zmienna losowa X jest całkowalna, oraz spełnia warunek $E|X|lg^{d-1}|X| = \infty$. Główny wynik tego podrozdziału Twierdzenie 5.2 jest analogonem znanego twierdzenia Chowa–Robbinsa dla pól losowych.

Ostatni rozdział kończy się autorskim dokładnym prawem wielkich liczb, dla pól losowych oraz ciekawymi, odpowiednio dobranymi dwoma przykładami, dla których to prawo może być zastosować

Konkluzja : Uważam, że uzyskane w doktoracie wyniki są oryginalne i na pewno spełniają ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Magister Paweł Kurasiński wydaje się być *bardzo dobrym matematykiem*, zdolnym do samodzielnej pracy naukowej. Jego wiedza z ogólnej teorii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej jest godna uwagi. Doktorat jest na bardzo dobrym poziomie, z tym, że wolałbym to potwierdzić po egzaminie doktorskim lub obronie, gdyż jedyne moje obiekcje dotyczą faktu, że współpracownikami Doktoranta byli świetni matematycy i nie jest dla mnie jasne jaki w tych pracach był udział Autora.

Henryk Gacki

