

Kraków, 10 sierpnia 2022.

Prof. dr hab. Marek Jarnicki
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
Tel. (12)–664-6634, fax (12)–664-6674
e-mail: Marek.Jarnicki@uj.edu.pl

Opinia o rozprawie doktorskiej
mgr Anny Futy
„Nierówności typu Schwarza
dla odwzorowań harmonicznych koła jednostkowego
unormowanych na brzegu”

Rozprawa stanowi rozwinięcie pracy [7] (A. Futa, D. Partyka), która z kolei jest uogólnieniem pracy [17] (D. Partyka, J. Zająć); numeracja prac jest zgodna ze spisem cytowanej literatury. Praca liczy 63 strony i, oprócz „Wstępu”, omawiającego szczegółowo główne wyniki rozprawy, składa się z czterech rozdziałów i „Bibliografii”.

Rozdziały 1-3 są poświęcone funkcjom harmonicznym z sektorową normalizacją brzegową. Głównym zagadnieniem jest następujący problem. Dla podziału $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_n)$ odcinka $[0, 2\pi]$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$ (będziemy pisać krótko: $\theta \in \mathcal{P}_n$) niech $T_k := \{e^{it} : t \in [\theta_{k-1}, \theta_k]\}$, $D_k(\theta) := \text{conv}(T_k \cup \{0\})$, $k = 1, \dots, n$. Niech $\mathcal{F}_\theta$ oznacza rodzinę wszystkich zespolonych funkcji harmonicznych w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ takich, że $F^*(z) \in D_k(\theta)$ dla p.w. $z \in T_k(\theta)$ względem miary Lebesgue’a m na $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$, $k = 1, \dots, n$, gdzie $F^*(z)$ oznacza granicę radialną funkcji F w punkcie z . Wiadomo, że wtedy $F = P[F^*]$, gdzie $P[f](z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) \frac{1-|z|^2}{|u-z|^2} dm(u)$ (całka Poissona). Autorka poszukuje oszacowań dla $|F(z)|$ niezależnych od wyboru funkcji $F \in \mathcal{F}_\theta$.

Podstawowym wynikiem jest tu Twierdzenie 3.1 mówiące, że

$$|F(z)| \leq 1 - (n - S)p(z), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{gdzie}$$

$$S := \sup\{\text{Re}(\bar{u}(v_1 + \dots + v_k)) : u \in \mathbb{T}, v_k \in D_k, k = 1, \dots, n\},$$

$$p(z) := \min\{P[\chi_{T_k}](z) : k = 1, \dots, n\}.$$

Ponadto, Twierdzenie 3.1 podaje warunki konieczne i dostateczne na to, by dla pewnych $F \in \mathcal{F}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$ zachodziła równość $|F(z)| = 1 - (n - S)p(z)$.

Aby uczynić oszacowanie $|F(z)| \leq 1 - (n - S)p(z)$ bardziej efektywnym Autorka dowodzi, że:

$$p(z) \geq \Xi(\theta, |z|) := \frac{1}{\pi} \left(2 \arctg \left(\frac{\sin \delta_\theta}{|z| + \cos \delta_\theta} \right) - \delta_\theta \right), \quad S \leq \varrho_n(\delta_\theta),$$

gdzie $\delta_\theta = \text{diam } \theta := \min\{\theta_k - \theta_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$ oraz

$$\varrho_n(\delta) := \sup\{\text{Re}(z_1 + \dots + z_n) : z_k \in D_k(\theta) : k = 1, \dots, n, \theta \in \mathcal{P}_n : \delta_\theta = \delta\}$$

(Wniosek 2.5). Łącznie daje to eleganckie oszacowanie (Wniosek 3.3):

$$|F(z)| \leq 1 - (n - \varrho_n(\delta_\theta))\Xi(\theta, |z|), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Oczywiście, aby oszacowanie było w pełni efektywne należy wyznaczyć/oszacować $\varrho_n(\delta_\theta)$. Autorka bada to zagadnienie w § 3.2.

Przypadki $n = 3, 4$ są rozważane bardziej szczegółowo.

Twierdzenie 3.16: Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$ i $z \in \mathbb{D}$ mamy

$$|F(z)| \leq 1 - 4 \sin^2\left(\frac{\delta_\theta}{2}\right) \Xi(\theta, |z|), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (*)$$

Ponadto, Twierdzenie 3.16 podaje warunki konieczne i dostateczne na to, by w (*) zachodziła równość.

Twierdzenie 3.21: Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$ i $z \in \mathbb{D}$ mamy

$$|F(z)| \leq \begin{cases} 1 - 4 \sin^2\left(\frac{\delta_\theta}{2}\right) \Xi(\theta, |z|), & \text{jeżeli } 0 < \delta_\theta \leq \frac{\pi}{5}, \\ 1 - (1 + 4 \sin^2\left(\frac{\delta_\theta}{2}\right)) \Xi(\theta, |z|), & \text{jeżeli } \frac{\pi}{5} \leq \delta_\theta \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (**)$$

Ponadto, Twierdzenie 3.21 podaje warunki konieczne i dostateczne na to, by w (**) zachodziła równość.

Rozdział 4 jest poświęcony oszacowaniom dla dyfeomorfizmów harmonicznych z klasyczną normalizacją brzegową. Dla $\theta \in \mathcal{P}_n$ niech $\mathcal{H}_\theta$ oznacza rodzinę wszystkich harmonicznych odwzorowań bijektywnych $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ takich, że $\lim_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow e^{i\theta_k}} F(z) = e^{i\theta_k}$, $k = 1, \dots, n$.

Autorka dowodzi, że $\mathcal{H}_\theta \subset \mathcal{F}_\theta$ (Lemat 4.3). Dalej, korzystając z dotychczasowych wyników dla rodziny $\mathcal{F}_\theta$, Autorka dowodzi, że dla $\theta \in \mathcal{P}_n$, $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$ mamy:

$$|F(z)| < 1 - (n - \varrho_n(\delta_\theta)) \Xi(\theta, |z|) \quad (\text{Twierdzenie 4.4}).$$

$$|\partial F(z)| \geq \frac{1}{2\pi} (n - \varrho(\delta_\theta)) \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_\theta}{2}\right) \quad (\text{Twierdzenie 4.9}).$$

Niech $K \in [1, +\infty)$. Jeżeli F jest K -quasikonforemne, to

$$|F(z) - F(w)| \geq \frac{n - \varrho_n(\delta_\theta)}{(K + 1)\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_\theta}{2}\right) |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{D} \quad (\text{Twierdzenie 4.14}).$$

Praca jest zredagowana starannie, choć poprzez brak spisu oznaczeń trochę traci na przejrzystości. Zawiera nowe, oryginalne rezultaty, stanowiące trwały wkład w geometryczną teorię funkcji harmonicznych. Autorka wykazuje dużą orientację w zakresie teorii funkcji harmonicznych i zagadnień pokrewnych. Uważam, że rozprawa doktorska mgr Anny Futy spełnia zwyczajowe i ustawowe wymogi stawiane pracom doktorskim i *stawiam wniosek o dopuszczenie Jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.*

m. Janicki