

Dr hab. Adam Lecko, prof. UWM
Katedra Analizy Zespolonej
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn

Olsztyn, 15.08.2022 r.

**Rada Naukowa
Instytutu Matematyki
UMCS w Lublinie**

Recenzja rozprawy doktorskiej

mgr inż. Anny Futy

zatytułowanej

**Nierówności typu Schwarza dla odwzorowań harmonicznych koła
jednostkowego unormowanych na brzegu**

A. W rozprawie autorka bada w pierwszej kolejności własności odwzorowań harmonicznych $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, gdzie $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jest kołem jednostkowym otwartym, mających tzw. sektorową normalizację brzegową, której definicja oparta jest na pojęciu partycji okręgu jednostkowego $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ rozumianej jako ciąg skończony $\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n\} =: \mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k$ łuków domkniętych leżących na okręgu $\mathbb{T}$ o dodatniej długości, całkowitej długości 2π i pokrywających okrąg $\mathbb{T}$. Wówczas dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ sektorowa normalizacja brzegowa stworzona z partycją $T_1, \dots, T_n$ rozumiana jest jako klasa $\mathcal{N}(T_1, \dots, T_n)$ wszystkich funkcji $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ takich, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ i p.w. $z \in T_k$ zbiór wszystkich radialnych punktów skupienia funkcji F w punkcie z należy do zbioru $D_k := \text{conv}(T_k \cup \{0\})$. Biorąc więc pod uwagę funkcje harmoniczne z sektorową normalizacją brzegową autorka skoncentrowała swój wysiłek badawczy w pierwszej kolejności na klasie $\mathcal{F}_\theta := \text{Har}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{N}(T_1(\theta), \dots, T_n(\theta))$, gdzie $\text{Har}(\mathbb{D})$ oznacza klasę wszystkich funkcji harmonicznych określonych w $\mathbb{D}$. Z kolei $\theta : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolnym ciągiem rosnącym takim, że $\theta_n - \theta_0 = 2\pi$, tj. θ jest elementem zbioru $\mathcal{P}_n$ wszystkich takich ciągów, zaś $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k := T_k(\theta)$ jest partycją wyznaczoną przez ciąg θ w taki sposób, że $T_k(\theta)$ jest domkniętym łukiem na okręgu $\mathbb{T}$ o początku w punkcie $e^{i\theta_{k-1}}$ i końcu w punkcie $e^{i\theta_k}$ (zgodnie z dodatnią orientacją) dla $= 1, \dots, n$. Jak autorka zauważa, każdą partycję $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k$ można sprowadzić do partycji typu $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k(\theta)$ generowanej przez pewien ciąg $\theta \in \mathcal{P}_n$ poprzez permutację σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,n}$ taką, że $T_{\sigma(k)} = T_k(\theta)$. Stąd klasa $\mathcal{F}_\theta$ jest naturalnym obiektem badań i autorka klasie tej poświęca w całości rozdział trzeci rozprawy. Zasadniczym zagadnieniem, na którym autorka się koncentruje jest uzyskanie w klasie $\mathcal{F}_\theta$ oszacowania typu Schwarza, a więc oszacowania postaci $|F(z)| \leq \lambda(|z|)$, gdzie $F \in \mathcal{F}_\theta$, $z \in \mathbb{D}$, zaś $\lambda : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ jest funkcją, która zależy tylko od klasy

$\mathcal{F}_\theta$. Kluczowym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie 3.1, które oprócz wartości samej w sobie, ma podstawowe znaczenie dla zastosowań omówionych w rozdziale czwartym. A mianowicie, w twierdzeniu 3.1 autorka dowodzi, że dla wszystkich $\theta \in \mathcal{P}_n$ i wszystkich $F \in \mathcal{F}_\theta$ w każdym punkcie $z \in \mathbb{D}$ zachodzi oszacowanie

$$(1) \quad |F(z)| \leq 1 - (n - S)p(z).$$

Po prawej stronie powyższej nierówności pojawiają się dwie wielkości, tj. S i $p(z)$. Stała S zdefiniowana jest formułą

$$S := \sup \left(\left\{ \operatorname{Re} \left(\bar{u} \sum_{k=1}^n v_k \right) : u \in \mathbb{T}, \mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto v_k \in D_k(\theta) \right\} \right)$$

natomiast

$$p(z) := \min \left(\{P[\chi_{T_k(\theta)}] : k \in \mathbb{Z}_{1,n}\} \right),$$

gdzie $D_k(\theta) := \operatorname{conv}(T_k(\theta) \cup \{0\})$ zaś $P[\chi_{T_k(\theta)}]$ oznacza całkę Poissona z funkcji charakterystycznej $\chi_{T_k(\theta)}$ zbioru $T_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Wielkość $p(z)$ jest więc najmniejszą miarą harmoniczną spośród wszystkich miar harmonicznnych $\omega(z, T_k(\theta); \mathbb{D})$ łuków $T_k(\theta)$ w punkcie z względem $\mathbb{D}$, z uwagi na fakt, że $P[\chi_{T_k(\theta)}] = \omega(z, T_k(\theta); \mathbb{D})$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Dodatkowo, co ma duże znaczenie, autorka znajduje wszystkie funkcje F , dla których w nierówności (1) zachodzi równość. W tym miejscu podkreślę, że dowód twierdzenia 3.1 jest trudny, pomysłowy i wymagający gruntownej wiedzy w temacie. U podstaw dowodu leży z kolei twierdzenie 2.11, w którym autorka wykazała, że dla dowolnego ciągu $\theta \in \mathcal{P}_n$ i dowolnego zbioru zwarteo $K \subset \mathbb{D}$ istnieje punkt z_K należący do brzegu zbioru K taki, że $|F(z)| \leq |F_K(z_K)|$ dla $F \in \mathcal{F}_\theta$ i $z \in K$, gdzie F_K jest kombinacją liniową funkcji $P[\chi_{T_k(\theta)}]$ o współczynnikach $c_k \in D_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Do dowodu twierdzenia 2.11 autorka posłużyła się wcześniej wykazanymi lematami 2.9 i 2.10 o reprezentacji dowolnej funkcji $F \in \mathcal{F}_\theta$ za pomocą wspomnianej kombinacji liniowej. Wracając do twierdzenia 3.1 jego użyteczność, jak autorka nadmienia, zależy od możliwości oszacowania $p(z)$ od dołu i S od góry. Problem obu oszacowań został w pracy gruntownie omówiony. Szacowanie z góry stałej S podane zostało w lemacie 3.2, w którym uzyskano wynik $S \leq \rho_n(\delta_\theta)$ dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_n$, gdzie δ_θ oznacza połowę długości najkrótszego łuku w partycji $T_1(\theta), \dots, T_n(\theta)$. Tutaj dla $\delta \in (0; \pi/n]$, $\rho_n(\delta) := \sup(A_\delta)$, przy czym A_δ jest zbiorem tych $s \in \mathbb{R}$, dla których istnieją $\theta \in \mathcal{P}_n$ oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in D_k(\theta)$ spełniające równości $\delta_\theta = \delta$ i

$$(2) \quad s = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right).$$

Z kolei szacowanie od dołu wielkości $p(z)$ podane zostało we wniosku 2.5, a mianowicie $p(z) \geq P[\chi_{I_{\delta_\theta}}](|z|)$ dla $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $z \in \mathbb{D}$. Tutaj I_{δ_θ} jest łukiem okręgu $\mathbb{T}$ o środku w punkcie -1 i długości $2\delta_\theta$. Wykorzystanie wspomnianych szacowań dla S i $p(z)$ zostało podsumowane we wniosku 3.3 w postaci oszacowania, które wynika z (1),

$$(3) \quad |F(z)| \leq 1 - (n - \rho_n(\delta_\theta))p(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

dla wszystkich $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $F \in \mathcal{F}_\theta$. Kolejnym krokiem w rozważaniach autorki jest oszacowanie wielkości $\rho_n(\delta)$, które sprowadza się do znalezienia oszacowania z góry liczby s określonej równością (2). Autorka przeprowadza wszechstronną analizę

tego problemu i we wniosku 3.8 uzyskuje fundamentalne dla dalszych rozważań szacowanie z góry liczby s , z którego dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, wynika oszacowanie

$$\rho_n(\delta) \leq 2 + \frac{\sin(N(n, \delta) \cdot \delta)}{\sin(\delta)}, \quad \delta \in (0; \pi/n],$$

gdzie $N(n, \delta) := \min(\{\text{Ent}(\pi/(2\delta)), n-2\})$, sformułowane we wniosku 3.10. Aby uzyskać powyższą nierówność autorka udowodniła kolejno lematy 3.4 i 3.5, twierdzenie 3.6, z których wynikają z kolei wnioski 3.7 i 3.8. Podsumowaniem rozważań jest twierdzenie 3.11, w którym podane zostało oszacowanie $|F(z)|$ dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $F \in \mathcal{F}_\theta$, za pomocą uzyskanego szacowania dla $\rho_n(\delta)$ i wspomnianego oszacowania dla $p(z)$. Nadmienię tutaj, że przypadek klasy $\mathcal{F}_\theta$ z partycjami określonymi przez $\theta \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ prowadzi do dość oczywistego dokładnego oszacowania $|F(z)| \leq 1$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}_\theta$, o czym autorka nadmienia w podrozdziale 1.3. Szczególny przypadek partycji z trzema i czterema lukami jest tematem kolejno podrozdziałów 3.3 i 3.4. Autorka w obu przypadkach korzysta z wniosku 3.3, a więc z nierówności (3) dla $n := 3$ i $n := 4$, przy czym w obu przypadkach stosując kolejno lematy 3.14 i 3.19 wyznacza dokładne wartości $\rho_3(\delta)$ dla $\delta \in (0; \pi/3]$ (wniosek 3.15) i $\rho_4(\delta)$ dla $\delta \in (0; \pi/4]$ (wniosek 3.20). W konsekwencji uzyskuje szacowanie modułu $|F(z)|$ dla $F \in \mathcal{F}_\theta$, gdzie $\theta \in \mathcal{P}_3$ (twierdzenie 3.16) i $\theta \in \mathcal{P}_4$ (twierdzenie 3.21). Istotnym wzmocnieniem uzyskanych nierówności w obu klasach jest analiza przypadku równości, i znalezienie wszystkich funkcji, dla których zachodzi równość w otrzymanych szacowaniach. Aby rozstrzygnąć problem dokładności szacowań autorka posłużyła się wprowadzonym przez siebie pojęciem *punktu mocno ekstermalnego* zbioru $A \subset \mathbb{C}$ i lematem 2.8 dotyczącym własności punktu mocno ekstermalnego.

B. Wyniki rozdziału trzeciego zostały wykorzystane w rozdziale czwartym, którego tematem są własności geometryczne dyfeomorfizmów harmonicznych F koła $\mathbb{D}$ na siebie unormowanych brzegowo w sposób klasyczny. Normalizacja brzegowa oznacza w tym przypadku, że dla dowolnego $\theta \in \mathcal{P}_n$ dyfeomorfizm harmoniczny F spełnia warunek

$$\lim_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow e_k} F(z) = e_k := e^{i\theta_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}.$$

Niech $\mathcal{H}_\theta$ oznacza klasę takich dyfeomorfizmów. Aby wykorzystać wyniki rozdziału trzeciego autorka dowodzi najpierw, że dla dowolnego $\theta \in \mathcal{P}_n$ zachodzi inkluzja $\mathcal{H}_\theta \subset \mathcal{F}_\theta$ (lemat 4.3). Wykorzystując teraz wniosek 3.3 autorka wyprowadza w podrozdziale 4.1 nierówność typu Schwarza szacując $|F(z)|$ dla dowolnie ustalonego $\theta \in \mathcal{P}_n$ i dowolnej funkcji F z klasy $\mathcal{H}_\theta$ (nierówność (4.4) w twierdzeniu 4.4). Dodatkowo, przeprowadzając szczegółową analizę uzasadnia, że równość w nierówności (4.4) nie może mieć miejsca. Następnie wyszczególnia przypadki $\theta \in \mathcal{P}_3$ i $\theta \in \mathcal{P}_4$ odpowiednio we wnioskach 4.5 i 4.7. Podrozdział 4.2 poświęcony jest znalezieniu nierówności Heinza dla klasy $\mathcal{H}_\theta$. Wynik ogólny dla dowolnego $\theta \in \mathcal{P}_n$ uzyskany został w twierdzeniu 4.9, w którym autorka szacuje z dołu $|\partial F(z)|$ (nierówność (4.12)) oraz $|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2$ (nierówność (4.13)) dla dowolnych $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$. Do uzyskania szacowania z dołu w nierówności (4.12) autorka korzysta z otrzymanego w twierdzeniu 4.4 oszacowania modułu $|F(z)|$. Analogicznie jak wcześniej wyróżnione są szczególne przypadki, tj. dla $\theta \in \mathcal{P}_3$ (wniosek 4.10) i $\theta \in \mathcal{P}_4$ (wniosek 4.12). W ostatnim podrozdziale pracy autorka znajduje oszacowanie od dołu typu Lipschitza wyrażenia $|F(z) - F(w)|$ dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$ przy

dotodkowym założeniu, że F jest odwzorowaniem K -quasikonforemnym dla ustalonego $K \in [1; +\infty)$ (twierdzenie 4.14). W dowodzie wykorzystana została wykazana wcześniej nierówność (4.12). Tak jak w poprzednich dwóch podrozdziałach, autorka wyszczególnia przypadki $\theta \in \mathcal{P}_3$ (wniosek 4.15) i $\theta \in \mathcal{P}_4$ (wniosek 4.17).

Opinia o rozprawie

A. Moja ocena rozprawy jest bardzo wysoka. Problemy, które autorka badała i rozwiązała są trudne, wymagające dużej wiedzy w zakresie teorii funkcji analitycznych i harmonicznych jak również odwzorowań quasikonforemnych. Wyniki, które autorka uzyskała są ważne zarówno od strony teoretycznej jak i zastosowań. Tematyka odwzorowań harmonicznych jest aktualna w badaniach wielu wybitnych matematyków. Rozprawa licząca 63 strony technicznie napisana jest perfekcyjnie. Użyty język matematyczny i bezbłędna formalizacja zapisu świadczą o wielkiej biegłości warsztatowej autorki. Nie znalazłem błędów merytorycznych i redakcyjnych. Dowody są poprawne. Sposób prowadzenia rozumowań w dowodach budzi uznanie dla ich przejrzystości, konsekwencji i precyzji. Rozprawa zawiera bardzo dobrze napisany wstęp. Dobrze zredagowany rozdział pierwszy zawiera niezbędne pojęcia ułatwiające czytanie tekstu. W rozdziale drugim autorka omawia miarę harmoniczną, by następnie w sposób jasny i systematyczny wyprowadzić wszystkie niezbędne własności, których użyje w kolejnych dwóch rozdziałach zawierających zasadnicze wyniki tej pracy.

Na koniec wymienię najważniejsze moim zdaniem rezultaty:

- Uzyskanie dokładnego szacowania typu Schwarza dla funkcji harmonicznych o sektorowej normalizacji brzegowej.
- Znalezienie konfiguracji ekstremalnych, dla których uzyskane szacowanie jest dokładne.
- Wprowadzenie pojęcia punktu mocno ekstremalnego i powiązanie go z problemem dokładności szacowań.
- Efektywne oszacowania funkcji $\rho_n(\delta)$ dla dowolnego n i dokładne formuły w przypadkach $n = 3$ i $n = 4$.
- Uzyskanie nierówności typu Schwarza dla dyfeomorfizmów harmonicznych z klasyczną normalizacją na brzegu.
- Znalezienie nierówności Heinza dla dyfeomorfizmów harmonicznych tak unormowanych.
- Znalezienie oszacowania typu Lipschitza dla dyfeomorfizmów harmonicznych quasikonforemnych z taką normalizacją.

B. Biorąc wszystkie aspekty pod uwagę moja opinia o rozprawie jest pozytywna. Rozprawa spełnia wszystkie wymogi „Ustawy o stopniach naukowych i tytułach naukowych oraz o stopniach i tytułach w zakresie sztuki”. Wnoszę więc o dopuszczenie Pani mgr inż. Anny Futy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z poważaniem,



Adam Lecko