



Dr hab. Piotr Bednarczyk,
profesor IFJ PAN.

Kraków, 05.09.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Jie Yang pt.:

“Systematic study of exotic nuclear shape symmetries and isomers, including shape evolution and competition in heavy and super-heavy nuclei”

Przedstawiona do oceny praca doktorska Pani mgr Jie Yang została wykonana w Katedrze Fizyki Teoretycznej Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS w Lublinie pod kierunkiem profesora Jerzego Dudka.

Temat pracy wpisuje się w nurt badań teoretycznych nad kształtami powierzchni jąder atomowych i opisującymi je symetriami. W badaniach tych stosuje się podejście teorii średniego pola oraz wykorzystuje zaawansowane metody teorii grup i ich reprezentacji. Tematyka ta rozwijana jest od dawna przez zespoły związane z Promotorem pracy. Doktorantka realizowała program badawczy w ramach wymiany studenckiej, na podstawie porozumienia pomiędzy UMCS, a Uniwersytetem Zhengzhou, w Chinach.

W przedstawionej dysertacji Doktorantka skupiła się na zagadnieniu modelowania realistycznego średniego pola jądra atomowego metodą Hartreego-Focka-Bogolyubova z zastosowaniem metod matematycznych: teorii grup i ich reprezentacji, rozwiązania zagadnienia odwrotnego czy teorii grafów.

Używając tych zaawansowanych narzędzi, Autorka starała się zidentyfikować i scharakteryzować nowe symetrie Hamiltonianu jądrowego. Otrzymane przez nią wyniki sugerują możliwość występowania w ciężkich jądrach atomowych egzotycznych, nieosiowych deformacji powierzchni.

1. Kontekst podjętej tematyki badań

Kształty większości znanych nuklidów, z wyjątkiem stanów podstawowych kilku jąder magicznych, wykazują odstępstwa od symetrii sferycznej. W pierwszym rzędzie są to deformacje kwadrupolowe- *prolate*, *-oblate* oraz trójosiowe.

Eksperymentalnie wykazano, że niektóre jądra, przede wszystkim w obszarze metali ziem rzadkich, w swoich stanach wzbudzonych przyjmują stabilne, silnie wydłużone lub spłaszczone kształty *prolate* lub *oblate*- tzw. superdeformacja. Często, m.in. w obszarze aktynowców, obserwowane są również deformacje oktupolowe. Teoria przewiduje także, głównie w jądrach superciężkich- transfermowcach o liczbie atomowej $Z > 100$, występowanie deformacji osiowosymetrycznych o jeszcze wyższych multipolowościach.

Rozważane jest też, tak jak przedstawiono w recenzowanej pracy, występowanie w różnych obszarach masowych innych egzotycznych kształtów jąder, opisywanych symetriami wyższych rzędów, jak deformacje tetraedryczne i oktaedryczne.

Deformacja powierzchni jądra ma decydujący wpływ na stabilność przede wszystkim najcięższych, syntetyzowanych nuklidów. Subtelne zmiany kształtu tych jąder są spowodowane silnymi efektami powłokowymi, co kompensuje szybko rosnący ze wzrostem Z , odpychający potencjał Kulombowski i prowadzi do powstania bariery na spontaniczne rozszczepienie. Rzeczywiście, wydłużenie czasu połowicznego zaniku obserwowane w jądrach superciężkich potwierdza istnienie tzw. wyspy stabilności, przewidywanej w okolicy podwójnie magicznego, sferycznego jądra o $Z=120$ i $N=184$.



Prowadzone na świecie od lat 50. XX w. intensywne prace eksperymentalne nad syntezą jąder superciężkich za pomocą reakcji wywołanych przyspieszonymi wiązkami jonów pozwoliły zbliżyć się do hipotetycznej wyspy stabilności. Aktualnie najcięższym znanym jądrem jest leżący na granicy tego obszaru oganeson ^{294}Og ($Z=118$, $N=176$), wytworzony w JINR w Dubnej, w roku 2002. Warto podkreślić, że w przedstawionej pracy podjęto próbę określenia równowagowego kształtu powierzchni izotopów Og oraz przewidywanych, jeszcze cięższych pierwiastków.

2. Struktura pracy

Dysertacja napisana jest w języku angielskim, liczy 244 strony. Rozpoczyna się streszczeniem, jego tłumaczeniem na język polski i ogólnym wstępem (rozdział 1).

Rozprawa składa się z dwóch zasadniczych części i aneksu, a dodatkowo podzielona jest na osiem rozdziałów z licznymi podrozdziałami:

I) W obszernym, liczącym 106 stron wprowadzeniu omówiono aspekty teorii średniego pola (rozdziały 2,3), zastosowanie koncepcji *pairingu* i teorii BCS do obliczeń struktury jądra (rozdział 4), użycie metod teorii grup do klasyfikacji symetrii jądrowych (rozdział 5);

II) W opisie wyników wraz z dyskusją (100 stron), przedstawiono rezultaty obliczeń wykonanych dla jąder ciężkich i superciężkich oraz analizę rozwiązań wskazujących na egzotyczne symetrie kształtu tych jąder (rozdział 6). Ponadto przedstawiono tu konkluzję pracy i perspektywy kontynuacji bieżącego programu badawczego (rozdział 7).

III) W aneksie opisano metodę Makroskopowo-Mikroskopową obliczeń (rozdział 8).

Pracę kończy licząca 136 pozycji bibliografia. Praca zawiera 11 tabel i zilustrowana jest 83 rysunkami.

3. Omówienie głównych paragrafów pracy

We wstępie Autorka przedstawia motywację podjęcia przez nią tematu pracy. Podkreśla, że jej dysertacja jest elementem szerszego programu badawczego koordynowanego przez Promotora pracy. Celem tego projektu jest opracowanie kompleksowego podejścia teoretycznego do wielu zagadnień struktury jądra badanych eksperymentalnie. Jego wynikiem ma być przygotowanie i udostępnienie szerszej społeczności fizyków jądrowych narzędzi w postaci kodów komputerowych do prowadzenia zaawansowanych obliczeń teoretycznych.

Wprowadzenie teoretyczne (I) jest autonomiczną częścią dysertacji i jest pomyślane jako kompendium najistotniejszych formuł prowadzących do konstrukcji zdeformowanego jądrowego średniego pola. Wychodząc od definicji podstawowych oddziaływań nukleon-nukleon (człon centralny, spin-orbita, tensorowy), Autorka konstruuje Hamiltonian układu wielonukleonowego. Parametryzuje powierzchnię jądra za pomocą rozwinięcia jego promienia w szereg harmonik sferycznych. Wprowadza radialnie zdeformowany fenomenologiczny potencjał Woods-Saxona (WS) zawierający człony: centralny i spin-orbita, i rozważa możliwe korelacje pomiędzy tradycyjnie opisującymi go sześcioma parametrami, redukując ich liczbę do czterech niezależnych wielkości. W dalszej części wywodu Doktorantka charakteryzuje symetrie Hamiltonianu jądrowego, takie jak: odwrócenie w czasie i w przestrzeni, sygnatura (obrót o kąt 180°) i sympleks (odbicie lustrzane). Do rozwiązania równania falowego dla Hamiltonianu średniego pola z potencjałem WS i Kulombowskim Autorka wykorzystuje bazę funkcji własnych trójwymiarowego oscylatora harmonicznego. Dyskutuje metody numerycznego wyznaczania elementów macierzowych operatora Hamiltona, przy założeniu jego niezmienniczości względem odwrócenia czasu i odbicia lustrzanego. Wkład oddziaływań resztkowych do potencjału średniego pola Autorka uwzględnia wprowadzając siły parowania opisywane równaniami teorii BCS. Kolejną modyfikacją Hamiltonianu średniego pola,



przedstawioną w tej części pracy, jest dopuszczenie wzbudzeń rotacyjnych jądra. Dla opisu kolektywnej rotacji wprowadzono częstość obrotu, momenty bezwładności- kinematyczny i dynamiczny, oraz podano związki tych wielkości z całkowitym momentem pędu. Z ich pomocą wyrażono także formułę na widmo energii rotora kwantowego. Następnie Autorka opisuje podstawy modelu kranking Inglisa. Wprowadza pojęcie Routhianu jednocząstkowego z rozszerzeniem uwzględniającym oddziaływanie parowania w ujęciu drugiej kwantyzacji. Autorka posługuje się koncepcją kwasicząstek, omawia transformację Bogolyubova operatorów kreacji i anihilacji, w tej reprezentacji. Na koniec tej części przytacza ogólną postać układu równań Hartreego-Focka-Bogolyubova z krankingiem (równania HFBC) i rozważa zastosowanie metody HFBC w przypadku kolektywnej rotacji jądra.

Istotnym aspektem wywodu jest opis symetrii Hamiltonianu jądrowego metodami zaczerpniętymi z teorii grup. Podane są tu *explicite* wyrażenia na tworzące grupę operatory transformacji obrotu. Następnie, scharakteryzowane są grupy punktowe specyficzne dla dyskretnych obrotów obiektów o wybranych symetriach, w szczególności jedno i dwuosiowych (C_n i D_n) oraz wyższych rzędów: tetraedrycznych i oktaedrycznych (T_d i O_h). W tym miejscu podkreślono, że w przeciwieństwie do standardowej, dwukrotnej degeneracji Kramersa energii poziomów, w obiektach kwantowych opisywanych symetriami T_d i O_h ma miejsce ich czterokrotna degeneracja. Dla zilustrowania kształtu jąder o symetrii tetraedru i oktaedru w pracy wykreślono niektóre powierzchnie opisane harmonikami sferycznymi o polowości odpowiednio $\lambda=3$ i $\lambda=4$ (rysunki 5.2.1 i 5.2.2). Na kolejnych stronach Autorka referuje zagadnienie macierzowych reprezentacji grup symetrii. Dyskutuje związek pomiędzy liczbą i wymiarem nieprzywiedlnych reprezentacji grup symetrii opisujących Hamiltonian średniego pola, a widmem i degeneracją energii własnych równania Schrödingera. Przedstawia przykładowe, przebiegi energii jednocząstkowych w jądrze ^{226}Th , wyliczone dla dwu- i cztero-wymiarowych nieprzywiedlnych reprezentacji symetrii tetraedrycznej (rysunek 5.3.2). Zauważa, że krzywe te grupują się w wiązki generując dla określonych wartości deformacji tetraedrycznej puste obszary, odpowiadające dużym przerwom energetycznym. Na podstawie analizy analogicznych wykresów, wykonanych dla jąder o różnych masach, Autorka określa zestaw siedmiu liczb magicznych $Z, N = 32, 40, 56, 64, 70, 90$ i 136 charakteryzujących jądra tetraedryczne. Na rysunku 5.3.3 umieszcza fragment tablicy nuklidów z zaznaczonymi czternastoma przewidywanymi, podwójnie magicznymi jądrami o tym kształcie.

Autorka zaznacza, że rotacja obiektu o symetrii punktowej T_d lub O_h nie jest opisana standardowymi operatorami grupy obrotów kwantowego rotora $O(3)$. Do wyznaczenia stanów rotacyjnych tetraedru stosuje zatem podejście opisane w literaturze, bazujące na własnościach grupy T_d . Doktorantka wymienia sekwencję spinów i krotności stanów tworzących tetraedryczne pasma rotacyjne, nadmienienia że widmo energetyczne rotora w funkcji momentu pędu opisuje klasyczna parabola- $E \sim I(I+1)$. Dla ilustracji tego efektu Autorka zamieszcza wyniki obliczeń HFBC (zaczerpnięte z literatury) z uwzględnieniem symetrii T_d , dla jądra ^{226}Th (rysunek 5.4.1), zwraca także uwagę na występowanie charakterystycznych degeneracji energii stanów o określonych spinach. Rozdział kończy przedstawienie sekwencji spinów stanów w pasmach rotacyjnych dla innych egzotycznych kształtów o symetrii D_{4h} i D_{2d} , które zilustrowano na rysunkach 5.4.2 i 5.4.3.

Opis wyników (II) to druga, obszerna część dysertacji. Rozdział ten rozpoczyna się opisem schematu obliczeń wykonywanych w ramach pracy. Do wyliczenia całkowitej energii potencjalnej jądra Autorka zastosowała metodę makroskopowo-mikroskopową, której szczegóły przedstawiono w Aneksie. Energię makroskopową określano na podstawie modelu kropłowego, stosując alternatywnie potencjały: *Folded Yukawa* lub *LSD*, a energię mikroskopową szacowano metodą poprawki powłokowej Strutinskiego. Kształt powierzchni jądra parametryzowano za pomocą rozwinięcia promienia w szereg harmonik sferycznych.

W obliczeniach uwzględniano człony odpowiadające deformacjom kwadrupolowym, oktapolowym, heksadekapolowym i wyższym. Rezultatem rachunków były mapy energii potencjalnej w funkcji różnych parametrów deformacji wyliczone dla ciężkich izotopów ołowiu, szeregu aktynowców oraz niektórych jąder superciężkich.



Autorka przeprowadziła analizę wpływu czterech deformacji oktopolowych ($\alpha_{3,0}-\alpha_{3,3}$) na przebieg jednocząstkowych energii neutronu powyżej zamkniętej powłoki sferycznej $N=126$ (rysunek 6.2.1). Stwierdziła, że dla liczby neutronów $N=136$ występuje wyraźna przerwa energetyczna faworyzująca kształty oktopolowe, w szczególności odpowiadające symetrii tetraedru ($\alpha_{3,2}$). Wykreślając mapy energii potencjalnej w funkcji parametrów deformacji kwadrupolowej i oktopolowej, Doktorantka pokazała, że dla parzystych izotopów ołowiu z $N=126-136$, wraz ze wzrostem masy, stopniowo łamana jest symetria sferyczna i coraz wyraźniej zaznacza się minimum energii przy niezerowej deformacji oktopolowej (rysunki 6.2.2 i 6.2.3). Podkreśliła przy tym, że ewolucja ta zachodzi przy braku komponenty kwadrupolowej. Kolejna seria map (rysunek 6.2.4) wykonana dla izotopu ołowiu ^{218}Pb , z $N=136$, ilustruje, że najgłębsze minimum i najwyższa bariera pomiędzy minimami oktopolowymi występują w przypadku deformacji tetraedrycznej tego jądra.

Kolejnym obszarem nuklidów, w którym przeprowadzono analizę kształtu stanu podstawowego był szereg izotopów radu $^{220-224}\text{Ra}$, z $N=132-136$. Mapy energii zamieszczone na rysunkach 6.2.5 i 6.2.6 pokazują, że równowagowa deformacja tych jąder zawiera komponentę oktopolową ($\alpha_{3,0}$) i kwadrupolową, przy czym Autorka zaznacza, że wyliczona wartość parametru $\alpha_{2,0}$ koreluje z wynikami eksperymentalnymi dla tych jąder. Ponadto, należy się tu także spodziewać występowania minimum energii odpowiadającego silnej deformacji *prolate* (superdeformacja). Przedstawione wyniki sugerują także możliwość koegzystencji kształtów *prolate* i tetraedr w stanie podstawowym, w szczególności w jądrze ^{224}Ra , o magicznej liczbie neutronów $N=136$. Autorka spekuluje, że w związku z tym, w jądrze tym można spodziewać się serii stanów izomerycznych, o wysokich spinach i wzbronionych przejściach $E1$ i $E2$.

Zamieszczona seria map wygenerowanych dla izotonów $N=136$: ^{220}Po , ^{222}Rn , ^{224}Ra i ^{226}Th (rysunki 6.2.7-10) sugeruje, że we wszystkich tych przypadkach występują egzotyczne deformacje o symetriach C_∞ , C_2 , D_{3h} . Autorka podkreśla także, że deformacja oktopolowa $\alpha_{3,2}$ pojawia się tu przy zerowej komponencie kwadrupolowej, co może odpowiadać symetrii tetraedrycznej T_d tych jąder. Kolejnym krokiem w rozważaniach nad deformacją wymienionych nuklidów jest wykonanie rachunków Routhianów dla neutronów, w okolicy $N=136$. Na rysunkach 6.3.1-4 pokazano, że przerwa energetyczna powstała w wyniku grupowania się orbitali neutronowych $2g_{9/2}$ i $1j_{15/2}$, których oddziaływanie generuje wzbudzenia typu oktopolowego, stopniowo zanika ze wzrostem częstości rotacji. Niemniej, Autorka stwierdza, że zakres tych częstości jest wystarczający aby rozważać wzbudzenia rotacyjne zbudowane na stanach o deformacji oktopolowej w tych jądrach. Zamieszcza szereg tabel (6.3.1-6), w których wymienia krotności degeneracji stanów rotacyjnych, o spinach z zakresu $I=0-12$ i parzystości $\pi \pm 1$, wynikające z założenia określonych symetrii: C_{2v} , D_{3h} i D_{2d} . Schematyczne widma energii, charakterystycznych dla tych symetrii pasm rotacyjnych, umieszcza na rysunkach 6.3.5-7.

W związku z tym, że kształt badanych jąder w dużej mierze określony jest przez cztery konkurencyjne komponenty deformacji oktopolowej, Autorka podejmuje próbę określenia ich najbardziej prawdopodobnej deformacji. W tym celu wykonuje minimalizację energii jądra ^{218}Pb w czterowymiarowej przestrzeni deformacji oktopolowych, co ilustruje projekcjami 2D (rysunki 6.4.1-3). Mapy te pokazują, złożoną strukturę płytkich lokalnych minimów. Aby określić prawdopodobieństwo penetracji przez dzielące te minima bariery potencjału Autorka stosuje przybliżenie WKB, przy czym długości trajektorii w czterowymiarowej przestrzeni wylicza posługując się algorytmem Dijkstry. Do określenia równowagowej deformacji dynamicznej, przybliżonej wartością oczekiwaną parametru deformacji, Doktorantka posługuje się jednak obrazem jednowymiarowym. Na rysunkach 6.5.1-3, wykreśla przebiegi energii potencjalnej i gęstości prawdopodobieństwa w funkcji parametrów deformacji $\alpha_{3,\mu}$, dla stanu podstawowego i pierwszego stanu wzbudzonego oraz wymienia odpowiadające im wartości deformacji dynamicznej. Autorka arbitralnie modyfikuje wysokość barier i wyciąga wniosek, że zmiana ta nie ma zasadniczego wpływu na wartość deformacji dynamicznej badanych układów.

Kolejnym tematem poruszonym w pracy jest analiza przewidywanych kształtów jąder ciężkich i superciężkich. Autorka, prześledziła wpływ domieszki deformacji o wysokich multipolowościach $\lambda=3,4,6,8$, na stabilność rozwiązań opisanych parametrami deformacji kwadrupolowej β, γ . W tym



celu wykonała szereg map energii we współrzędnych β, γ , dokonując minimalizacji względem wartości pozostałych parametrów deformacji. Przykład takiego zestawu map dla ^{248}Cf pokazany jest na rysunku 6.7.3. Wyniki obliczeń wskazują, że w stanie podstawowym jądro to wykazuje deformację *prolate*, $\beta = 0.267$, konsystentnie z wynikami eksperymentu. Ponadto rachunki wskazują na drugie minimum energii przy deformacji $\beta = 0.6$ (superdeformacja). Analiza przeprowadzona dla szeregu cięższych parzystych izotopów kalifornu $^{248-258}\text{Cf}$ oraz izotonów $N=150$ (^{244}Pu - ^{258}Hs) wykazała także, że osiowosymetryczne deformacje o wyższych multipolowościach, w szczególności $\alpha_{6,0}$, i $\alpha_{8,0}$, mają wpływ na pogłębienie minimum energii stanu podstawowego (rysunki 6.7.5,6).

Autorka zaznacza, że podobną charakterystykę mają powierzchnie energii większości jąder z obszaru $Z = 98-110$, $N = 144-160$.

Doktorantka wykonała rachunki energii jednocząstkowych w funkcji deformacji oktupolowej, dla obszaru jąder superciężkich. Odtwarzają one sferyczne liczby magiczne dla $Z=114, 120$ oraz $N=184$.

Z obliczeń tych wynika także, że dla neutronów, przy niezerowej deformacji oktupolowej powstaje przerwa energetyczna, dla $N = 196$, a szczególnie wyraźnie zaznacza się ona w przypadku deformacji tetraedrycznej (rysunki 6.8.1,2). Rzeczywiście, obliczenia energii potencjalnej stanu podstawowego ^{310}Fl ($N = 194$) sugerują w tym jądrze czystą deformację oktupolową, bez domieszki członu kwadрупolowego (rysunek 6.8.4).

Autorka prześledziła również, sugerowany w literaturze przedmiotu wpływ domieszki deformacji *oblate* na energię potencjalną jąder superciężkich. Wykonała rachunki energii jednocząstkowych, z założeniem deformacji $\beta = -0.15$, z których wynika zanik sferycznych przerw energetycznych, m.in. dla $N=184$ (rysunek 6.8.5). Dla szeregu izotopów oganesonu: $^{290-302}\text{Og}$ wykonała mapy energii potencjalnej (rysunek 6.8.7), z których wynika, że deformacji *oblate* $\beta = -0.15$ towarzyszy kształt $\alpha_{3,3}$, przy czym pozostałe trzy składowe multipletu oktupolowego nie grają większej roli w obniżeniu energii. Efekt ten zilustrowano dla ^{302}Og , na rysunku 6.8.8. Przewidywaną ewolucję kształtu najcięższych nuklidów Autorka prześledziła na podstawie zestawu map energii przygotowanych dla izotonów $N = 184$: ^{298}Fl , ^{302}Og , $^{306}\text{122}$, $^{310}\text{126}$. Pokazała, że dla $Z \geq 118$ pojawia się wyraźnie minimum *oblate*-oktupol (rysunek 6.8.9).

Na zakończenie, Autorka przedstawiła wyniki systematycznych obliczeń deformacji równowagowej stanów podstawowych dla jąder z obszaru $114 \leq Z \leq 130$, $166 \leq N \leq 206$. Na rysunkach 6.8.10,11 zaznacza obszary w których dominuje deformacja *oblate* (większość rozważanych nuklidów), tetraedryczna (głównie w rejonie $N \sim 196$, $Z \sim 122$) i oktupolowa $\alpha_{3,3}$. Na podstawie tych obliczeń stwierdza, że najwyższą barierą na rozszczepienie w tym rejonie charakteryzują się nuklidy o deformacji tetraedrycznej.

W zakończeniu pracy Doktorantka rekapitułuje otrzymane wyniki. Podkreśla, że do tej pory brak eksperymentalnego potwierdzenia występowania w ciężkich jądrach atomowych egzotycznych symetrii, takich jak T_d . Niemniej, Autorka kreśli perspektywy kontynuacji jej badań teoretycznych w lżejszych jądrach, gdzie być może łatwiej o eksperymentalną weryfikację jej tez.



4. Uwagi i opinia recenzenta

Pod względem edycji i formy rozprawa nie budzi większych zastrzeżeń, choć kilkakrotnie natknąłem się w jej tekście na literówki (nawet w polskim tłumaczeniu streszczenia).

Poniżej zamieszczam listę ważniejszych uwag, które nasunęła mi lektura pracy:

1. Niektóre błędy, które traktuję jako pomyłki edycyjne:
 - str. 128, chodziło prawdopodobnie o $N \geq 136$,
 - str. 142, powinno być odniesienie do rys 6.3.5,
 - str. 168, odniesienie do rys 6.6.1,
 - str. 204, powinno być $114 \leq Z \dots$,
 - str. 213, w ostatnim zdaniu podsumowania pracy stwierdzono, istotną rolę deformacji $\alpha_{3,3} = 0.2$ i $\alpha_{2,0} = -0.9$, w stabilizacji jąder z $Z > 120$, podczas gdy w toku pracy dyskutowano wartości raczej na poziomie $\alpha_{3,3} = 0.2$ i $\alpha_{2,0} = -0.2$.
2. Niekiedy Autorka posługuje się lapidarnymi stwierdzeniami, które w przypadku pracy doktorskiej mogłyby być lepiej uzasadnione. Na przykład w rozdziale 2.4.1 wymienia sferyczne jądra podwójnie magiczne, wspominając o eksperymentalnych wynikach potwierdzających ich kształt. Jakie obserwacje pozwalają na wnioskowanie o sferyczności tych jąder? Skąd na tej liście ^{90}Zr i ^{146}Gd , i dlaczego nie uwzględniono tu podwójnie magicznego jądra ^{78}Ni ?
3. Autorka czasem posługuje się pojęciami, wprowadzonymi dopiero w dalszych częściach pracy, np. kwaszczałki na str. 67. Operuje też terminami, których w ogóle nie wyjaśnia, np. „superdeformacja”. „Coriolis mixing”. Brakuje też omówienia znaczenia „zredukowanych prawdopodobieństw przejść” $B(E1, E2, E3)$ i ich jednostek Weisskopfa, na co się powołuje, np. na str. 119. i 183.
4. W pracy zdarzają się częste powtórzenia wzorów (z różną numeracją). Niekiedy są one zapisane w różnych konwencjach, jak na przykład wzory 2.4.3 i 2.4.5 odpowiadają wzorom 3.1.3 i 3.1.5, lecz z innym umieszczeniem wskaźników. Podobnie, wzory 4.2.26 i 4.3.34 (a w konsekwencji także wzory 4.3.35 i 4.3.38), różnią się czynnikiem $1/2$. Wzór 2.3.1 przepisany jest wielokrotnie.
5. Autorka często powołuje się na implementację opisanych metod teoretycznych w postaci kodów numerycznych. W pracy nie znalazłem żadnej wzmianki o konkretnej realizacji tych programów. Autorka nie podaje też nazw ani referencji do programów, które używała do wykonania przedstawionych obliczeń.
6. Na rysunku 5.3.2, gdzie pokazano przebiegi poziomów jednocząstkowych, do opisu orbitali zastosowano zestaw Nilssonowskich liczb kwantowych, lecz konwencja ta nie jest nigdzie wyjaśniona. Na rysunku tym wszystkie krzywe wyrysowane są liniami ciągłymi, mimo że w opisie wymieniono także linie przerywane. Wzmiankowane w opisie rysunku dokładniejsze wyjaśnienia w tekście, sprowadzają się do powołania się na ten rysunek, na stronie 99.
7. Na wszystkich rysunkach map energii potencjalnych skala kolorów rozpoczyna się od 0 MeV, co jak napisano, odpowiada energii makroskopowej sferycznego jądra. Tymczasem wyliczona energia w minimach jest ujemna. Czy skalę tę należy traktować jako względną, to jest w odniesieniu to $E_{\min}$?
8. Pomocnym byłoby zamieszczenie w pracy systematycznej reprezentacji graficznej wszystkich kształtów multipletu oktapolowego.
9. W opisie tabeli 6.3.1, Autorka odsyła czytelnika do nieistniejącego rozdziału „Grupy” w Aneksie, czy chodziło może o któryś z rozdziałów wstępu teoretycznego?



10. W tabeli 5.4.2 wypisano krotności stanów dla spinów do $I=10$, podczas gdy w formule 5.4.15 i na rysunku 5.4.1 wymieniono także stany z $I=12$. Skąd taki właśnie zakres spinów ? Jak obliczono energie wzbudzenia poziomów rotacyjnych na schematach na rysunku 6.5.3 i następnych ? Czy wszystkie symetrie mają takie samo widmo energetyczne, co sugerują te rysunki ? Dla symetrii D_{3h} i D_{2d} , krotności stanów w tabelach i na rysunkach nie zgadzają się.
11. Na rysunkach 6.5.2 i 6.5.3, opisy wykresów są nieczytelne w wersji drukowanej. Niemniej, wersja elektroniczna pozwala dostrzec na rysunku 6.5.2, że deformacji $\alpha_{3,2}$ w ^{218}Pb towarzyszy nieznaczna deformacja $\alpha_{4,0} = -0.025$, podczas gdy wszystkie inne przypadki nie zawierają optymalizacji wyższych rzędów deformacji, skąd ten wyjątek ?
12. Opisy krzywych w legendzie na rysunkach 6.7.5 i 6.7.6, w wersji drukowanej są nieczytelne.
13. Na rysunku 6.6.2 i kolejnych, wydaje się że większość prezentowanych map jest powtórzeniem wcześniej prezentowanych diagramów (np. z rysunku 6.2.4), choć przeskalowanych, podane tu wartości E_{min} i E_o są jednak nieco inne niż poprzednio, skąd te różnice ?
14. Rysunek 6.6.8 nie ma odnośnika w tekście pracy, podobnie jak rysunek 6.7.1, który jest powtórzony w rycinie 6.7.2.
15. W tytule, i we wstępie do rozdziału 6. na str. 115., Autorka zapowiada, że jednym z badanych tematów będzie zagadnienie izomeryzmu, a w szczególności izomerów kształtu w jądrach superciężkich. Temat ten nie został jednak wystarczająco rozwinięty w toku pracy. Lapidarna informacja na str. 126., powtórzona na str. 131., jest jedynie wzmianką o spodziewanych w jądrach tetraedrycznych pasmach stanów izomerycznych, ze wzbronieniem przejść $E1$ i $E2$. Na str. 150. wspomniano o izomerach K , a na str. 191. o izomerach rozszczepienia, z podaniem referencji do innych prac. Zachęcony tytułem czytelnik mógłby się spodziewać bardziej pogłębionej dyskusji w tej materii. W pracy nie znalazła się charakterystyka ani geneza stanów określanych mianem izomerów. Nie podano żadnych kryteriów, np. długości czasów życia, pozwalających zaliczyć stany jądrowe do tej kategorii, ani sposobu rozpadu tych stanów. Nie podano przykładów izomerów znanych w jądrach superciężkich. Ciekawym aspektem mogłoby być oszacowanie czasów życia stanów o symetrii tetraedrycznej, oraz rozważenie wpływu domieszek deformacji kwadrupolowej i oktupolowej na tę wielkość.

Przedstawione wyżej uwagi nie zmieniają mojej wysokiej oceny pracy doktorskiej Pani mgr. Jie Yang.

Uważam, że podjęła ważny i ciekawy problem badawczy dotyczący egzotycznych symetrii kształtów ciężkich jąder atomowych. Do jego zgłębienia zastosowała nowoczesne podejście teoretyczne oraz zaawansowane metody matematyczne i obliczeniowe. Z ich pomocą systematycznie zbadała równowagowe deformacje stanów podstawowych w obszernym zakresie odkrytych i przewidywanych najcięższych jąder.

Na podstawie przedstawionej rozprawy pozytywnie oceniam przygotowanie merytoryczne i warsztat badawczy doktorantki.

Stwierdzam, że przedstawiona do oceny dysertacja spełnia warunki określone w art. 187 ust.1,2,3 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku i wnoszę o dopuszczenie magister Jie Yang do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania jej stopnia doktora.