

Recenzja pracy doktorskiej mgra Macieja Parola zatytułowanej
 "Przedłużenia holomorficzne iloczynu Hadamarda funkcji holomorficznych".

Praca jest prawie 60-stronicową rozprawą składającą się ze strony tytułowej, spisu treści, wstępu, trzech rozdziałów zasadniczych 1, 2, 3 oraz bibliografii. Motywację do badań określonych tytułem rozprawy doktorant podaje we wstępie. Rozdział pierwszy zawiera różnorodne własności podstawowych pojęć używanych w rozprawie, rozdział drugi główny rezultat, a rozdział trzeci pewne zastosowania wyników z poprzednich rozdziałów. Numeracja wszystkich definicji, twierdzeń, wniosków, lematów i uwag, jest łączna w obrębie każdego rozdziału, oddzielną numerację w rozdziałach mają wzory. Bibliografia obejmuje 16 pozycji, w tym jedną publikację współautorską [14].

Wstęp.

Dla funkcji f, g holomorficznych w otoczeniu zera iloczyn Hadamarda to następująca funkcja

$$(0.1) \quad \mathbb{D}(0, R_{f,g}) \ni z \longmapsto (f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)g^{(n)}(0)}{(n!)^2} z^n,$$

gdzie $R_{f,g}$ to promień, a $\mathbb{D}(0, R_{f,g})$ koło zbieżności szeregu potęgowego po prawej stronie. Znałe są przykłady funkcji f, g których iloczyn Hadamarda $f * g$ można holomorficznie rozszerzyć poza koło $\mathbb{D}(0, R_{f,g})$. Skoro dla obszarów $A, B \subset \mathbb{C}$, zawierających zero oraz funkcji $f \in Hol(A), g \in Hol(B)$ mamy relację

$$\varrho(A)\varrho(B) = dist(0, \partial A)dist(0, \partial B) \leq R_f R_g \leq R_{f,g},$$

gdzie R_f, R_g są promieniami zbieżności szeregów Maclaurina funkcji f, g , więc interesująca jest holomorficzna rozszerzalność iloczynu Hadamarda $f * g$ na obszary $\Omega \subset \mathbb{C}$ zawierające koło $D = \mathbb{D}(0, \varrho(A)\varrho(B))$. Rodzinę takich obszarów Ω , że dla dowolnych funkcji $f \in Hol(A), g \in Hol(B)$ istnieje funkcja $h \in Hol(\Omega)$ spełniająca warunek

$$(0.5) \quad h(z) = (f * g)(z), z \in D = \mathbb{D}(0, \varrho(A)\varrho(B)),$$

oznacza się przez $H_1(A, B)$. Pojawia się problem o maksymalny, w sensie inkluzji, taki obszar. Górne ograniczenie dla takich zbiorów ma postać

$$\Omega \subset (A^c \cdot B^c)^c, \Omega \in H_1(A, B),$$

gdzie dla podzbiorów X, Y domkniętej płaszczyzny $\widehat{\mathbb{C}}$, zbiór X^c jest dopełnieniem $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$, zaś $X \cdot Y$ iloczynem algebraicznym X, Y (bez elementów $0\infty, \infty 0$).

Już to ograniczenie górne uzasadnia używanie specjalnego oznaczenia i określenia dla zbioru $(A^c \cdot B^c)^c$. Zbiór ten oznacza się jako $A * B$ i nazywa splotem Hadamarda obszarów A, B (autor deklaruje priorytet operacji $*$ w stosunku do operacji $\cap, \cup$, ale w inkluzji (1.15) nie trzyma się chyba tej zasady).

Nasuwa się pytanie: czy inkluzja $\Omega \subset (A * B), \Omega \in H_1(A, B)$, jest optymalna, tzn. czy dla pewnych rodzin obszarów A, B , zawierających zero, górne ograniczenie $A * B$ w $H_1(A, B)$ należy do $H_1(A, B)$. Z uwagi na spójność Ω , należy pytać czy składowa spójna zawierająca zero $CC_0(A * B)$ zbioru $A * B$ należy do $H_1(A, B)$. Pozytywną odpowiedź można znaleźć w pracach [12] i [14]. W pracy [14] rozważano też problem konstruktywnego sposobu scharakteryzowania funkcji h , która jest holomorficznym rozszerzeniem iloczynu $(f * g)|_D$. Ten ważny rezultat, uzyskany przez doktoranta w 2021 roku, sformułowany jest we wstępie w postaci Twierdzenia 0.2. [14, Thm. 3.1]. Z twierdzenia tego wynika, że jeśli obszary $A, B \subset \mathbb{C}$, są jednospójne i zawierają zero, to $CC_0(A * B) \in H_1(A, B)$ oraz $CC_0(A * B)$ jest największym zbiorem w $H_1(A, B)$. Co więcej, funkcja $h = T(f, g)|_\Omega$ określona wzorem całkowym (0.15) jest jedyną holomorficzną funkcją spełniającą warunek (0.5).

W rozdziale pierwszym udowodniono prawie 50 różnorodnych faktów dotyczących pojęć związanych ze splotem $A * B$ zbiorów i zgrupowano je w podrozdziałach od (1.1) do (1.6). W szczególności w:

- (1.1) - izomorfizm struktur $(2^{\widehat{\mathbb{C}}}; \cdot)$ i $(2^{\widehat{\mathbb{C}}}; *)$, równość potwierdzającą rozdzielnosć splotu $A * B$ względem iloczynu $\cap$ oraz inkluzję pokazującą brak rozdzielnosć splotu $A * B$ względem sumy $\cup$;
- (1.2) - twierdzenie 1.11. o alternatywnej charakteryzacji splotu $A * B$, bez użycia iloczynu algebraicznego;
- (1.3) - własności obrazów $T_p(U)$ zbiorów $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ dla odwzorowań liniowych nieosobliwych T_p w $\widehat{\mathbb{C}}$;
- (1.4) - warunki wystarczające domkniętości, otwartości i spójności $A * B$ oraz jednospójności składowej zbioru $A * B$;

(1.5) - warunki liniowej osiągalności, wypukłości czy gwiazdzystości zbioru $A * B$ (przypomnijmy, że gwiazdzystosć w analizie zespolonej pełni taką rolę jak wypukłosć w analizie funkcjonalnej);

(1.6) - charakteryzację operacji $*$ dla zbiorów δ -spiralnych względem zera.

Wszystkie fakty są uszeregowane w przemyślanym porządku, a dowody bazują na faktach wcześniej uzyskanych (po definicji iloczynu algebraicznego można było objaśnić symbol $\frac{z}{B}$). Na szczególną uwagę zasługuje opatrzenie tych faktów numerowanymi uwagami o optymalności założeń i poparcie ich odpowiednimi kontrprzykładami (nie wiadomo jednak dlaczego taka informacja po lemacie 1.29 nie została opatrzona numerowaną uwagą). Dodajmy, że można było znacznie więcej rezultatów formułować w języku niezmienników.

Rozdział drugi składa się z trzech części, przy czym część 2.1 zawiera definicję uogólnienia iloczynu Hadamarda dwóch funkcji, część 2.2 fakty pomocnicze wykorzystywane przy sformułowaniu zasadniczego twierdzenia i prowadzeniu dowodu, a część 2.3 - zasadnicze twierdzenie oraz wnioski dotyczące przedłużenia uogólnionego iloczynu Hadamarda.

Iloczyn Hadamarda (0.1), zastąpiono tu klasą uogólnionych iloczynów Hadamarda $H_\lambda(f, g)$ generowanych przez rodzinę Λ takich zespolonych ciągów $\lambda = (\lambda_n)$ (n przebiega zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$), że

$$(2.1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = 0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda_{-n}|}$$

i ma postać

$$(2.5) \quad \mathbb{D}(0, R_f R_g) \ni z \longmapsto H_\lambda(f, g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_{n-k} \right) b_n z^n,$$

gdzie a_n, b_n , dla $n \in \mathbb{N}_0$, są współczynnikami rozwinięć Maclarina funkcji f, g , zaś $a_{-n} = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Widać, że w przypadku gdy $\lambda_0 = 1, \lambda_k = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, uzyskuje się oczekiwaną redukcję

$$H_\lambda(f, g)(z) = (f * g)(z), z \in \mathbb{D}(0, R_f R_g).$$

Zauważmy, że powyższa modyfikacja odbyła się kosztem utraty przemienności i łączności iloczynu Hadamarda. Jednakże, co jest ważne, udało się doktorantowi wykazać, że problem rozszerzalności holomorficzej $H_\lambda(f, g)$ ma podobne rozwiązanie jak w wyjściowym przypadku $f * g$. Zasadniczy rezultat to

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnych $\lambda \in \Lambda$ i obszarów jednospójnych $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających zero, Iloczyn $A * B$ jest zbiorem otwartym i istnieje taki operator*

$$T_\lambda : Hol(A) \times Hol(B) \rightarrow Hol(A * B),$$

że dla dowolnych funkcji $f \in Hol(A), g \in Hol(B)$

$$(2.17) \quad T_\lambda(f, g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) L_\lambda(u) \frac{du}{u}, \quad z \in (A * B) \setminus \{0\},$$

gdzie $\gamma \subset A \cap \frac{z}{B}$ jest kawałkami gładką krzywą zamkniętą, $ind_\gamma(0) = 1$, zaś L_λ jest szeregiem Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n u^n$ ze wzoru (2.13). Operator T_λ spełnia warunki aproksymacyjne (2.10) i (2.11).

W warunku (2.11) zamiast *ucc* można było użyć skrótu od polskiej nazwy "zbieżność niemal jednostajna"; podobnie w (0.12) (w tym miejscu zauważmy, że do warunku (0.11) wkraśl się też angielski spójnik *and*).

Część (2.3) rozdziału 2 kończy wniosek 2.12 o rozwiązaniu problemu.

W całym rozdziale widać przemyślaną systematykę. Przed definicją uogólnionego iloczynu Hadamarda doktorant przygotowuje potrzebne do niej fakty, podobnie przed głównym twierdzeniem. Dowody w tym rozdziale są o wiele dłuższe i trudniejsze niż w rozdziale pierwszym. Szczególnie dowody twierdzenia 2.10 i twierdzenia 2.11 wymagały wykorzystania aparatu z różnych działów matematyki. Doktorant wykazał się tu dużą znajomością tych metod.

Pierwsza część rozdziału trzeciego zawiera przykłady ilustrujące różne aspekty wyznaczania spłotu zbiorów:

P. 3.1 - zbiór jednopójny A dający niespójny zbiór $A * A$.

P. 3.2 - zbiory: gwiazdzisty A i $\frac{\pi}{6}$ -spiralny B , których spłot $A * B$ ma obie te własności.

P. 3.3 - koła o środkach różnych od zera, których spłot nie jest kołem.

P. 3.4 - zbiór wertykalnie wypukły A taki, że $A * A$ jest kołem.

P. 3.5 - zbiór gwiazdzisty A taki, że uwaga 1.47 upraszcza wyznaczenie $A * A$.

P. 3.6 - zbiór gwiazdzisty A taki, że twierdzenie 1.45 bardzo upraszcza wyznaczenie $A * A$.

W części drugiej rozdziału trzeciego widzimy dwa przykłady zastosowania wyników z rozdziału drugiego:

P. 3.7 - demonstruje uogólniony iloczyn Hadamarda $H_\lambda(f, g)$, $\lambda = (\lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_k = 0$ dla pozostałych $k \in \mathbb{Z}$, który odgrywa istotną rolę w teorii przestrzeni Hardy'ego.

P. 3.8 - podane są dwie funkcje $\varphi, \psi \in Hol(\mathbb{D})$, które z pomocą wniosku 2.12 można łatwiej niż w tradycyjny sposób, holomorficznie rozszerzyć na pewne zbiory B, A . Postać tych rozszerzeń wynika ze wzoru (2.17), z $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_k = 0$ dla pozostałych $k \in \mathbb{Z}$, wskazując takie $f, g \in Hol(\mathbb{D})$, że $f * f = g * g = \varphi$, $f * g = \psi$. Przykład uzupełnia obserwacja o trudnościach w ogólnym przypadku, gdy φ zamienimy na φ_λ , $\lambda = (\lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (bez założenia, że $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_k = 0$ dla pozostałych $k \in \mathbb{Z}$).

Podane przykłady wzmacniają odczucie czytelnika o nietrywialnej strukturze pojęć iloczynu Hadamarda oraz o dużych możliwościach zastosowań tego pojęcia w analizie zespolonej i poza nią.

Bibliografia nie jest zbyt bogata. Biorąc pod uwagę tytuł rozprawy, wydaje się, że mogły by się tu znaleźć jeszcze publikacje uogólniające iloczyn Hadamarda na funkcje holomorficzne wielu zmiennych zespolonych, np. praca S. Zajęca, The Hadamard multiplication theorem in several complex variables, Complex Var. Elliptic Equ. 62 (2017), 1-26.

Rozszerzając moje szczegółowe uwagi, czynione w trakcie prezentacji zawartości rozprawy, stwierdzam, że rozprawa zawiera nowe oryginalne wyniki i metody badawcze, wnoszące wartościowy wkład w teorię zespolonych funkcji holomorficznych jednej zmiennej. To oraz dobra organizacja i przejrzystość prezentowania zawartości rozprawy pokazują, że doktorant dobrze orientuje się w trudnej tematyce rozprawy.

Podsumowując uważam, że rozprawa spełnia ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim*, to jest stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie naukowej Matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. W konsekwencji, wnioskuję o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jednocześnie wnioskuję o uznanie rozprawy doktorskiej Macieja Parola za wyróżniającą.

*) Art.13 ust.1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki, z dnia 14.03.2003r.

Łódź, 05.08.2022 r.

Prof. dr hab. Piotr Liczberski

