

dr hab. Paweł Zaprawa
Katedra Informatyzacji i Robotyzacji Produkcji
Zakład Matematyki
Wydział Mechaniczny
Politechnika Lubelska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Macieja Parola

Przedłużenia holomorficzne iloczynu Hadamarda funkcji holomorficznych

Mgr Maciej Parol jest autorem 9 prac naukowych opublikowanych w czasopismach o zasięgu międzynarodowym. Spośród nich, dwie opublikowane w czasopiśmie *Analysis and Mathematical Physics* oraz jedną w *Proceedings of the Romanian Academy Series A* można uznać za publikacje wysoko punktowane wg listy czasopism Ministerstwa Edukacji i Nauki (odpowiednio: 100 pkt i 70 pkt). Trzy artykuły opublikowane zostały w wiodącym w Polsce w zakresie analizy zespolonej czasopiśmie *Annales UMCS*.

Opiniowana praca doktorska dotyczy klasycznego już problemu przedłużenia holomorficznego iloczynów Hadamarda na maksymalny w sensie inkluzji zbiór zawierający 0. Rozprawa składa się ze *Wstępu* oraz trzech rozdziałów: *Splot zbiorów*, *Uogólnienia iloczynu Hadamarda funkcji holomorficznych*, *Przykłady zastosowań*. Literatura na którą powołuje się Autor liczy 16 pozycji.

Na początku mojej recenzji przedstawię problem badawczy rozważany przez Autora. Niech $\text{Hol}(E)$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji holomorficznych w zbiorze E . Dla zadanych dwóch obszarów $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających 0 oraz dwóch funkcji $f \in \text{Hol}(A)$, $g \in \text{Hol}(B)$ iloczyn Hadamarda $f * g$ określony wzorem

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n, \text{ gdzie } a_n = f^{(n)}(0)/n!, b_n = g^{(n)}(0)/n!,$$

jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu punktu 0, a konkretnie w kole $D = \mathbb{D}(0, \varrho(A)\varrho(B))$, gdzie $\varrho(E) = \sup\{r \geq 0 : \mathbb{D}(0, r) \subset E\}$.

Badania omawiane w rozprawie docelowo dotyczą wyznaczania maksymalnego w sensie inkluzji zbioru Ω takiego, że dla dowolnych funkcji $f \in \text{Hol}(A)$, $g \in \text{Hol}(B)$

$$\exists h \in \text{Hol}(\Omega) \quad h(z) = (f * g)(z), \quad z \in D,$$

lub innymi słowy, funkcja $(f * g)|_D$ ma rozszerzenie holomorficzne na zbiór Ω . W pracy [12] Müller wykazał, że takim zbiorem jest $CC_0(A * B)$, spójna składowa zbioru $A * B$ zawierająca 0 (o definicji splotu zbiorów - dalej). W przypadku gdy A, B są obszarami jednospójnymi Autor wyznacza

postać całkową tego rozszerzenia (Twierdzenie 0.2). Ponadto, Autor rozważa uogólnienie iloczynu Hadamarda. Mianowicie, λ -iloczynem Hadamarda funkcji f i g nazywa funkcję określoną wzorem

$$H_{\lambda}(f, g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \right) b_n z^n,$$

gdzie λ jest ustalonym ciągiem takim, że $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = 0$ oraz $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\lambda_{-n}|} = 0$. Główny wynik pracy stanowi Twierdzenie 2.11, które uogólnia Twierdzenie 0.2 na przypadek λ -iloczynu Hadamarda. Wynika z tego twierdzenia, że gdy zbiory A, B są jednospójne, to maksymalnym w sensie inkluzji zbiorem dla którego istnieje przedłużenie holomorficzne jest $CC_0(A * B)$. Co więcej, wyznaczona została postać całkowa tego rozszerzenia. Autor osiąga więc podstawowy cel jaki postawiony został w rozprawie.

Bardzo istotną część rozważań stanowią badania nad splotami zbiorów, którym poświęcony jest cały rozdział pierwszy. Wychodząc od definicji splotu zbiorów $A * B = (A^C \cdot B^C)^C$, gdzie $E^C = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$, badane są jego własności algebraiczne i topologiczne. Jako ważny wynik należy tu wskazać alternatywną charakteryzację splotu zbiorów bez konieczności wyznaczania iloczynu algebraicznego zbiorów (Twierdzenie 1.11). Rozdział poświęcony splotom zbiorów kończy analiza geometrycznych własności splotu. I tak, posługując się koncepcją $\mathcal{P}$ -zbiorów, Autor wykazuje, że przy dość prostych warunkach dodatkowych, splot $A * B$ zachowuje takie własności geometryczne jak liniowa osiągalność, wypukłość, gwiazdzistość czy spiralność, o ile A posiada jedną z ww. własności. Co więcej, w Twierdzeniu 1.45 oraz Uwadze 1.47 proponuje nowy sposób wyznaczania zbioru $A * B$, w przypadku gdy zbiory te są gwiazdzyste lub δ -spiralne poprzez tzw. charakterystykę brzegową.

Można by powiedzieć, że wyniki dotyczące splotu zbiorów, jakkolwiek dla Autora mające wartość pomocniczą, same w sobie są wielce interesujące. Co więcej, rysują się ogromne możliwości prowadzenia dalszych badań naukowych w tym kierunku. Pozwolę sobie na postawienie dwóch pytań:

- czy zbiór $A * B$ jest wypukły w pewnym kierunku, jeśli zbiory A, B są wypukłe w ustalonym kierunku?
- czy zbiór $A * B$ jest prawie wypukły, jeśli zbiory A, B są prawie wypukłe?

Bardzo ważnym elementem rozprawy są bardzo liczne przykłady ilustrujące przedstawiane własności czy to splotu zbiorów czy iloczynów Hadamarda. Przykłady najważniejsze zebrane zostały w rozdziale trzecim. Na uwagę zasługuje stosunkowo prosty przykład zbioru jednospójnego A dla którego $A * A$ jest zbiorem niespójnym (Przykład 3.1) oraz Przykład 3.5 ilustrujący wykorzystanie metody charakterystyki brzegowej do wyznaczenia splotu $A * A$, gdzie $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 1\}$. Z kolei w Przykładzie 3.8 dyskutowane są przedłużenia holomorficzne iloczynów Hadamarda funkcji $f(z) = \log(1+z)$ i $g(z) = -\log(1-z)$ określonych odpowiednio na zbiorach $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ oraz $B = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

Przedstawioną rozprawę należy bez wątpienia oceniać bardzo wysoko. Materiał jest bardzo starannie opracowany, dowody, choć niekiedy długie i trudne, są przejrzyste i logicznie zbudowane. Przykłady ilustrujące poszczególne fragmenty ułatwiają czytanie całości. Na szczególne uznanie zasługuje niezwykle wręcz staranność w zakresie językowym oraz składu tekstu - bez najmniejszych usterek.

Jedyne zauważone przeze mnie mankamenty to:

- brak zdefiniowania pojęcia "punkt przyległy zbioru",

- brak zdefiniowania (oczywistych skądinąd) symboli: $\frac{z}{B}$, $\mathbb{T}$ czy symbol cyklu użyty na stronie 43,
- niefortunne określenie "funkcja 2π -okresowa" (str. 43),
- kolizja oznaczeń we wzorze (2.22),
- brak nawiasów wokół symboli $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ oraz $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ w Lemacie 1.12 i Uwadze 1.13.

Podsumowując stwierdzam, że rozprawa jest oryginalna i o dużym znaczeniu naukowym. Autor wykazuje się dużą wiedzą, sprawnością i kulturą matematyczną. Rozprawa spełnia więc wszystkie wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim; wnioskuję zatem o dopuszczenie mgr Macieja Parola do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

