

Streszczenie rozprawy doktorskiej pt.

Przedłużenia holomorficzne iloczynu Hadamarda funkcji holomorficznych

Autor: mgr Maciej Parol

Promotor: dr hab. Dariusz Partyka, prof. KUL

Iloczyn Hadamarda $f * g$ funkcji f i g holomorficznych w kole jednostkowym $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0, 1)$, gdzie $\mathbb{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ dla $a \in \mathbb{C}$ i $r \geq 0$, został zdefiniowany w XIX wieku przez Hadamarda. W przypadku, gdy funkcje f i g są holomorficzne w pewnym otoczeniu zera jest on zdefiniowany za pomocą wzoru

$$\mathbb{D}(0, R_{f,g}) \ni z \mapsto f * g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)g^{(n)}(0)}{(n!)^2} z^n,$$

gdzie $R_{f,g}$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego. W pewnych przypadkach iloczyn Hadamarda $f * g$ może zostać rozszerzony holomorficznie poza koło $\mathbb{D}(0, R_{f,g})$. W naturalny sposób pojawił się problem wyznaczenia uniwersalnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$, na który można przedłużyć holomorficznie funkcję $f * g$ dla dowolnych funkcji $f \in \text{Hol}(A)$ i $g \in \text{Hol}(B)$, gdzie $A, B \subset \mathbb{C}$ są obszarami zawierającymi zero, a symbol $\text{Hol}(\Omega)$ oznacza klasę wszystkich funkcji holomorficznych w obszarze Ω . Przyjmując $\rho(D) := \sup(\{r \geq 0 : \mathbb{D}(0, r) \subset D\})$ dla zbioru $D \subset \mathbb{C}$ zawierającego zero, dla dowolnie zadanych obszarów $A, B \subset \mathbb{C}$ została zdefiniowana klasa $\mathcal{H}_1(A, B)$ wszystkich obszarów $\Omega \subset \mathbb{C}$, na które funkcja $(f * g)|_{\mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B))}$ ma rozszerzenie holomorficzne. W dość łatwy sposób można pokazać, że dla każdego $\Omega \in \mathcal{H}_1(A, B)$,

$$\Omega \subset A * B := \hat{\mathbb{C}} \setminus (\hat{\mathbb{C}} \setminus A \cdot \hat{\mathbb{C}} \setminus B),$$

gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn algebraiczny zbiorów. Operacja $*$ została nazwana splotem zbiorów. Problem przedłużalności holomorficznej iloczynu Hadamarda został rozwiązany w 1992 roku przez Müllera. Korzystając z faktu, że iloczyn Hadamarda może zostać przedstawiony w postaci wzoru całkowego Parsevala, wykazał on, że maksymalnym w sensie inkluzji obszarem w $\mathcal{H}_1(A, B)$ jest składowa spójna zbioru $A * B$ zawierająca zero. Motywacją do napisania tej rozprawy stała się następująca koncepcja uogólnienia iloczynu Hadamarda. Dla dowolnych zbiorów otwartych $A, B \subset \mathbb{C}$ niech $\mathcal{H}_2(A, B)$ oznacza klasę wszystkich zbiorów otwartych $\Omega \subset \mathbb{C}$, dla których istnieje operator $T : \text{Hol}(A) \times \text{Hol}(B) \rightarrow \text{Hol}(\Omega)$ spełniający warunki:

- (i) $T(f, g) = f * g$ dla wszystkich wielomianów f i g ;
- (ii) dla wszystkich ciągów $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n \in \text{Hol}(A)$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto g_n \in \text{Hol}(B)$ oraz wszystkich $f \in \text{Hol}(A)$ i $g \in \text{Hol}(B)$, jeżeli $f_n \xrightarrow{\text{ucc}} f$ w A i $g_n \xrightarrow{\text{ucc}} g$ w B , gdy $n \rightarrow +\infty$, to $T(f_n, g_n) \xrightarrow{\text{ucc}} T(f, g)$ w Ω , gdy $n \rightarrow +\infty$,

gdzie symbol $\xrightarrow{\text{ucc}}$ oznacza zbieżność niemal jednostajną.

Rozdział pierwszy jest w całości poświęcony splotowi zbiorów i jego własnościom. Podrozdział 1.1 zawiera podstawowe własności splotu zbiorów wynikające bezpośrednio z definicji, takich jak łączność, przemienność czy monotoniczność. W podrozdziale 1.2 wykazana została alternatywna charakterystyka splotu zbiorów i podano jej zastosowania. Podrozdział 1.3 zawiera twierdzenia dotyczące splotu zbiorów, które wynikają ze szczególnych własności rodziny odwzorowań $\hat{\mathbb{C}} \ni z \mapsto T_p(z) := pz$ dla $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Podrozdziały 1.4 i 1.5 dotyczą odpowiednio własności topologicznych i geometrycznych splotu zbiorów. W podrozdziale 1.6 opisane są charakterystyki splotu zbiorów w przypadku, gdy zbiory A i B są obszarami spiralnymi względem zera.

W drugim rozdziale rozprawy został zdefiniowany λ -iloczyn Hadamarda H_λ , gdzie $\lambda : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ jest dowolnie zadany ciąg spełniającym warunek

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = 0 \quad \text{oraz} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\lambda_{-n}|} = 0;$$

por. definicja 2.2. W przypadku, gdy $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_k = 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, operator H_λ staje się operatorem iloczynu Hadamarda $*$. Dlatego operator H_λ jest naturalnym uogólnieniem operatora $*$. Zastępując iloczyn Hadamarda $*$ przez λ -iloczyn Hadamarda H_λ można w naturalny sposób określić odpowiedniki $\mathcal{H}_1^\lambda(A, B)$ i $\mathcal{H}_2^\lambda(A, B)$ klas $\mathcal{H}_1(A, B)$ i $\mathcal{H}_2(A, B)$. Podrozdział 2.1 zawiera definicję i podstawowe własności λ -iloczynu Hadamarda. Wiodącym wynikiem rozprawy jest twierdzenie 2.11, z którego wynika w szczególności, że $A * B \in \mathcal{H}_2^\lambda(A, B)$. Ponadto z twierdzenia 2.11 wynika, że składowa spójna splotu $A * B$ zawierająca zero należy do klasy $\mathcal{H}_1^\lambda(A, B)$; por. wniosek 2.12. Istotną rolę w dowodzie twierdzenia 2.11 odgrywa reprezentacja całkowa Parsevala operatora H_λ będąca treścią twierdzenia 2.10. Wszystkie te wyniki zostały zamieszczone wraz z dowodami w podrozdziale 2.3. Podrozdział 2.2 zawiera kilka lematów pomocniczych potrzebnych do udowodnienia twierdzenia 2.11.

Trzeci rozdział zawiera przykłady ilustrujące rozważania z poprzednich dwóch rozdziałów. Przykłady w podrozdziale 3.1 dotyczą zastosowania różnych metod wyznaczania splotów zbiorów. Podrozdział 3.2 sygnalizuje możliwość zastosowania rezultatów z rozdziału drugiego.

12.05.2022

Małgorzata Pender