Anna Futa
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie

Lublin, 26.04.2022

Streszczenie rozprawy doktorskiej pt.

Nierówności typu Schwarza dla odwzorowań harmonicznych koła jednostkowego unormowanych na brzegu

Autor: mgr inż. Anna Futa
Promotor: dr hab. Dariusz Partyka, prof. KUL

Niech Ω będzie obszarem w płaszczyźnie zespolonej $\mathrm{E}(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}, \rho_e)$, gdzie ρ_e jest standardową metryką, o brzegu $\Gamma \neq \emptyset$. Ustalając dowolnie niepusty zbiór $A \subset \Gamma$ i funkcję $f : A \to \mathbb{C}$ można postawić interesujące zagadnienie badania klasy $\mathcal{D}_A(\Omega, f)$ złożonej ze wszystkich funkcji ciągłych $F : \Omega \cup A \to \mathbb{C}$, które pokrywają się z funkcją f na zbiorze A i są harmoniczne w obszarze Ω, tzn. funkcje F są dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły w obszarze Ω i spełniają w nim równanie różniczkowe Laplace'a. W szczególności, jeśli $A = \Gamma$ to zagadnienie badania klasy $\mathcal{D}_\Gamma(\Omega, f)$ jest klasycznym problemem Dirichleta dla obszaru Ω z funkcją brzegową $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. W przypadku koła jednostkowego $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jego brzegiem jest okrąg jednostkowy $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i jedyne rozwiązanie problemu Dirichleta dla $\mathbb{D}$ z ciągłą funkcją brzegową $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ można wyznaczyć za pomocą całki Poissona $F = \mathrm{P}[f]$.

Niniejsza rozprawa dotyczy w znacznej mierze wyżej postawionego problemu dla klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$, gdzie A jest skończonym podzbiorem okręgu $\mathbb{T}$, $\mathcal{A}$ jest klasą wszystkich bijekcji zbioru $\mathbb{D} \cup A$ na siebie i $f(z) = z$ dla $z \in A$. Osiągnięte wyniki w tym zakresie zostały przedstawione w rozdziale 4 i zależą od parametru rzeczywistego δ charakteryzującego rozkład punktów zbioru A na okręgu $\mathbb{T}$. Są one konsekwencją rezultatów uzyskanych w rozdziale 3 i zostaną wyszczególnione w dalszej kolejności.

Problem badania klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ nie jest łatwy. Pionierskie wyniki w tym zakresie zostały otrzymane w 2015 roku przez D. Partykę i J. Zająca dla zbioru $A := \{e^{2\pi i k/3} : k \in \{0, 1, 2\}\}$. Oszacowali oni moduł $|F(z)|$ dla $F \in \mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ i $z \in \mathbb{D}$. Użyta metoda polegała na dokładnym oszacowaniu tego modułu w szerszej klasie funkcji harmonicznych $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ spełniających następujący warunek sektorowy: dla każdego $k \in \{1, 2, 3\}$ i dla prawie każdego $u \in T_k := \{e^{2\pi i t/3} : t \in [k-1; k]\}$ granica radialna funkcji F w punkcie u należy do otoczki wypukłej, rozpiętej przez początek układu współrzędnych i łuk T_k. Wspomniane wyniki stanowiły inspirację do napisania niniejszej rozprawy. W 2018 roku A. Futa i D. Partyka rozważyli przypadek ogólniejszy, w którym trzy łuki zastąpiono skończonym ciągiem $T_1, T_2, \ldots, T_n$ łuków domkniętych zawartych w $\mathbb{T}$ o dodatniej długości, całkowitej długości 2π i pokrywających okrąg $\mathbb{T}$. Ciąg ten został nazwany *partycją okręgu* $\mathbb{T}$, zaś odpowiadający tym łukom warunek sektorowy został nazwany *sektorową normalizacją brzegową stowarzyszoną z partycją* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *okręgu* $\mathbb{T}$; por. definicje 1.1 i 1.2. Należy przy tym dodać, że wszystkie uzyskane wtedy wyniki obowiązują przy domyślnym założeniu, że wszystkie łuki partycji okręgu $\mathbb{T}$ nie przekraczają połowy długości tego okręgu. To obostrzenie jest usunięte w rozprawie, przez co wyniki w niej otrzymane obowiązują dla wszystkich partycji.

Wiodącym zagadnieniem niniejszej rozprawy jest szacowanie modułu funkcji harmonicznych $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ z normalizacją sektorową, co prowadzi do nierówności typu Schwarza dla klasy takich funkcji. Uzyskane w tym zakresie rezultaty są zawarte w rozdziale 3, a ich dowody są oparte na faktach pomocniczych zebranych w rozdziale 2. Precyzując, struktura pracy składa się z czterech rozdziałów.

Rozdział 1 zawiera podstawowe pojęcia i oznaczenia używane w rozprawie a także obowiązujące w niej ogólne założenia. Zdefiniowano w nim rozważane klasy funkcji, ze szczególnym uwzględnieniem klasy funkcji harmonicznych. Przypomniano podstawowe informacje dotyczące całki Poissona w kole $\mathbb{D}$. Następnie określono tytułową nierówność typu Schwarza i wskazano przykłady takich nierówności dla wybranych klas funkcji. Na koniec wprowadzono kluczową w dalszych rozważaniach *sektorową normalizację brzegową*.

W rozdziale 2 znajdują się wyniki pomocnicze, użyteczne w dalszym ciągu rozważań. Dotyczą one miary harmonicznej i jej własności. Na szczególną uwagę zasługują tutaj zdefiniowanie *punktu mocno ekstremalnego zbioru* i wykazanie powiązanego z tym pojęciem lematu 2.8. Ponadto scharakteryzowano klasę odwzorowań harmonicznych spełniających normalizację sektorową i udowodniono kilka użytecznych własności tej klasy.

Rozważania w rozdziale 3 bazują na twierdzeniu 3.1. Stanowi ono wzmocnioną wersję wyniku otrzymanego w 2018 roku przez A. Futę i D. Partykę poprzez zniesienie wspomnianego wcześniej obostrzenia na partycje okręgu $\mathbb{T}$ oraz dodanie warunków koniecznych i dostatecznych pojawienia się równości w oszacowaniu w twierdzeniu 3.1. Twierdzenie to jest użytecznym narzędziem do badania konfiguracji ekstremalnych, co stanowi szczególną wartość tego twierdzenia. Następnie rozważania dotyczą partycji okręgu na n łuków o dowolnej długości. Wniosek 3.3 wyraża oszacowanie modułu $|F(z)|$ w zależności od liczby n łuków partycji $T_1, T_2, \ldots, T_n$ okręgu $\mathbb{T}$, połowy długości δ jej najkrótszego łuku oraz wartości $p(z)$ najmniejszej miary harmonicznej punktu z względem tych łuków. Zastosowanie oszacowania wartości $p(z)$ z wniosku 2.5 prowadzi do wersji radialnej oszacowania wartości $|F(z)|$ zależnej od parametrów n, δ i $|z|$. W obu przypadkach użyta jest funkcja ρ_n określona wzorem (3.19). Zagadnienie szacowania i wyznaczania wartości $\rho_n(\delta)$ jest przedmiotem dalszych rozważań w tym rozdziale. Oszacowanie dla $\rho_n(\delta)$ podaje wniosek 3.10, z którego wyprowadzono nierówność typu Schwarza dla partycji złożonej z n łuków; por. twierdzenie 3.11. Następnie rozważono przypadek partycji z trzema, a potem z czterema łukami. W tym celu wyznaczono wartość $\rho_3(\delta)$ dla $\delta \in (0; \pi/3]$; por. wniosek 3.15. To łącznie z wnioskiem 3.3 doprowadziło do nierówności typu Schwarza dla partycji z trzema łukami, podanej w twierdzeniu 3.16. Co więcej, przy użyciu twierdzenia 3.1 scharakteryzowano wszystkie przypadki ekstremalne, czyli pary (F, z), dla których nierówność w oszacowaniu modułu $|F(z)|$ staje się równością. W szczególności, dla $\delta = \pi/3$ otrzymane oszacowanie wartości $|F(z)|$ pokrywa się z wynikiem uzyskanym w 2015 roku przez D. Partykę i J. Zająca. Następnie wyznaczono wartość $\rho_4(\delta)$ dla $\delta \in (0; \pi/4]$; por. wniosek 3.20. W konsekwencji wyprowadzono nierówność typu Schwarza dla partycji z czterema łukami oraz scharakteryzowano wszystkie możliwe przypadki ekstremalne; por. twierdzenie 3.21.

Ostatni rozdział 4 ma charakter aplikacyjny i wskazuje możliwość zastosowań wyników otrzymanych w rozdziale 3. Wyprowadzono w nim nierówności typu Schwarza oraz warianty nierówności Heinza dla harmonicznych dyfeomorfizmów koła $\mathbb{D}$ na siebie spełniających klasyczną normalizację brzegową. W konsekwencji uzyskano dolne ograniczenia typu Lipschitza dla takich dyfeomorfizmów przy dodatkowym założeniu ich quasikonforemności.

Anna Futa