Agnieszka Gergont
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

Lublin, 21.06.2022

Streszczenie rozprawy doktorskiej mgr Agnieszki Gergont pt.

O izomorfizmach i izomorficznych włożeniach pomiędzy L_1-predualnymi. Zastosowania.

Promotor: dr hab. Łukasz Piasecki

Badania dotyczące izomorfizmów, izomorficznych włożeń i odległości Banacha-Mazura należą do klasycznych nurtów badań w analizie funkcjonalnej. Ważną część tych badań stanowią próby oszacowania dystorsji izomorficznych włożeń, jak również uzyskania dokładnej wartości odległości Banacha-Mazura pomiędzy dwiema konkretnymi przestrzeniami Banacha.

Rozprawa jest poświęcona badaniom dotyczącym odległości Banacha-Mazura pomiędzy wybranymi L_1-predualnymi oraz pewnych zastosowań uzyskanych wyników.

Rozdział pierwszy tej rozprawy zawiera podstawowe definicje i fakty dotyczące wybranych klas L_1-predualnych.

Pierwszą część drugiego rozdziału stanowi przegląd najważniejszych wyników dotyczących odległości Banacha-Mazura pomiędzy przestrzeniami $C_0(K)$, natomiast druga część poświęcona jest zagadnieniu prawie izometrycznych ℓ_1-predualnych.

Rozdział trzeci dotyczy izomorficznych włożeń oraz izomorfizmów pomiędzy pewnymi L_1-predualnymi. Najpierw badamy dystorsję $\|T\|\|T^{-1}\|$ izomorficznego włożenia T z przestrzeni c ciągów zbieżnych w nieskończenie wymiarową L_1-predualną X taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $r \in [0,1)$, tj. zbiór wszystkich słabych* punktów skupienia zbioru wszystkich punktów ekstremalnych domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni dualnej X^* jest zawarty w domkniętej kuli o promieniu $0 \leqslant r < 1$. Dowodzimy, że

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant \frac{3-r}{1+r}.$$

Ponadto, podajemy przykłady pokazujące, że dla każdego $r \in (0,1)$ to oszacowanie jest optymalne. Następnie wykazujemy ogólniejszy wynik, w którym przestrzeń c jest zastąpiona ℓ_1-predualną hiperpłaszczyzną w c i podajemy przykłady pokazujące, że uzyskane oszacowanie jest optymalne. W ostatniej części rozdziału dowodzimy, że jeżeli X jest ℓ_1-predualną izomorficzną z c_0, to dla każdego izomorfizmu $T : X \to c_0$ (o ile istnieje) mamy

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant 1 + 2r^*(X),$$

gdzie $r^*(X) = \inf\{r > 0 : (\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}\}$.

W rozdziale czwartym przedstawiamy kilka zastosowań wyników otrzymanych w rozdziale trzecim. Wykazujemy pewne wyniki stabilnościowe dotyczące własności wielościenności i rozszerzalności operatorów zwartych w obrębie L_1-predualnych. Aby osiągnąć ten drugi cel, podajemy dodatkowo nową charakteryzację L_1-predualnych mających własność rozszerzania dla operatorów zwartych. Następnie badamy topologiczne i metryczne własności przestrzeni $(\mathcal{H}, d)$, gdzie $\mathcal{H}$ jest zbiorem wszystkich ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w przestrzeni c, d oznacza odległość Banacha-Mazura i utożsamiamy hiperpłaszczyzny,

które są prawie izometryczne. Udowadniamy, że przestrzeń $(\mathcal{H}, d)$ jest homeomorficzna z przestrzenią (K, d_{ℓ_1}), gdzie

$$K = \{x \in \ell_1 : \|x\| \leqslant 1 \text{ i } x(i) \geqslant x(i+1) \geqslant 0 \text{ dla wszystkich } i \in \mathbb{N}\}$$

i $d_{\ell_1}(x, y) = \|x - y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i) - y(i)|$ dla wszystkich $x, y \in K$. Następnie konstruujemy homotopię ściągającą $\mathcal{H}$ do c_0 wzdłuż najkrótszych ścieżek w $\mathcal{H}$ i obliczamy ich długości. Na przykład pokazujemy, że najkrótsza krzywa w $\mathcal{H}$ łącząca c i c_0 ma długość $\ln 4$.

Ostatnia część rozdziału czwartego poświęcona jest stabilności słabej* własności punktu stałego w obrębie ℓ_1-predualnych. W tej części rozprawy, podajemy dokładne wartości stałych stabilności w klasie $\mathcal{H}$ i w klasie $\mathcal{F}$ wszystkich ℓ_∞^n-sum prostych i c_0-sum prostych ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c. Następnie wprowadzamy nową stałą stabilności opartą na metryce ścieżkowej i podajemy dokładne wartości tej stałej w przestrzeni $(\mathcal{H}, d)$ i $(\mathcal{F}, d)$.

21.06.2022 r.

Agnieszka Gergont