

prof. dr hab. Jacek Jachymski
Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka
ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź

Łódź, dnia 25 maja 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
Pani mgr Marioli Walczyk
pt. „Zbiory diametralnie zupełne z pustym wnętrzem”

Rozprawa doktorska Pani Walczyk dotyczy problemu istnienia zbiorów diametralnie zupełnych o pustym wnętrzu w nieskończenie wymiarowych i refleksywnych przestrzeniach Banacha. Samo pojęcie zbioru diametralnie zupełnego wprowadził już w 1911 r. E. Meissner i jest ono związane z pojęciem zbioru o stałej szerokości pochodzącym od L. Eulera. W szczególności, w skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha każdy zbiór o stałej szerokości jest zbiorem diametralnie zupełnym (wynik Meissnera). W 1965 r. Eggleston pokazał jednak, że zbiór diametralnie zupełny nie musi mieć stałej szerokości, nawet w trójwymiarowych przestrzeniach Banacha. W ostatnich latach nastąpił wzrost zainteresowania tematyką zbiorów diametralnie zupełnych poczynając od dwóch prac z 2006 r., których autorami są J.P. Moreno, P.L. Papini i R.R. Phelps. Autorzy rozszerzyli wynik Egglestona pokazując, że w każdej przestrzeni Banacha o wymiarze co najmniej trzy można wprowadzić równoważną normę tak, że w otrzymanej przestrzeni istnieje zbiór diametralnie zupełny o niepustym wnętrzu, który nie ma stałej szerokości. Z kolei w 2015 r. L. Caspani i P.L. Papini udowodnili, że oba pojęcia są równoważne w przestrzeniach Hilberta, dwuwymiarowych przestrzeniach Banacha i skończenie wymiarowych przestrzeniach euklidesowych. Od 2015 r. prowadzone są badania nad istnieniem zbiorów diametralnie zupełnych o pustym wnętrzu. Wiadomo, że takie zbiory nie istnieją w skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha, ale w 2017 r. E. Maluta wykazała ich istnienie w pewnej refleksywnej i lokalnie jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha.

Tematyka rozprawy doktorskiej Pani Walczyk jest więc aktualna i dobrze wpisuje się w badania prowadzone przez innych autorów. Jej praca jest bardzo obszerna: liczy 102 strony i składa się aż z piętnastu rozdziałów i czterech dodatków. Spis literatury zawiera 98 pozycji. Obszerność pracy częściowo wynika z faktu, że w siedmiu rozdziałach (1, 2, 6, 9, 10, 12 i 14) podane są wiadomości pomocnicze, co pochwalam, gdyż ułatwia to studiowanie tej pracy, a faktycznie przedstawiany w niej materiał wymaga dość zaawansowanej znajomości analizy funkcjonalnej,

głównie w aspekcie geometrii przestrzeni Banacha. Większość rezultatów rozprawy została już opublikowana w pięciu artykułach: dwa w *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A* i po jednym *J. Nonlinear Conv. Anal.*, *J. Funct. Anal.* (140 pkt. wg punktacji listy ministerialnej) i *Taiwanese J. Math.* Jednak wszystkie te artykuły są współautorskie (z udziałem 3 lub 4 autorów) i nie jest dla mnie jasne, jaki był udział Doktorantki w tych pracach. Część wyników – z rozdziałów 11, 13 i 15 oraz dodatków 1, 3 i 4 – jest przygotowywana do publikacji.

Wobec dużej liczby wyników, ograniczę się do omówienia kilku, moim zdaniem, najbardziej wyróżniających się. Pierwszy z nich to uogólnienie rezultatu Rainwatera z 1969 r.: twierdzenie 3.2, które podaje konstrukcję uogólnionej normy Daya, przy której przestrzeń $c_0(\Gamma)$ staje się przestrzenią lokalnie jednostajnie wypukłą.¹ Dowód jest skomplikowany rachunkowo i zajmuje aż 10 stron – jest to najdłuższy dowód w tej pracy. W tym samym rozdziale Doktorantka pokazuje, że powyższa przestrzeń ma też słabą własność Opiala: dowód twierdzenia 3.7 wykorzystuje idee z artykułu E. Maluty z 2017 r.

W rozdziale 4 na wyróżnienie zasługuje twierdzenie 4.1 dotyczące pewnego prze-normowania przestrzeni $C([0, 1])$, którego ważną konsekwencją jest twierdzenie 4.3 orzekające, że każda nieskończenie wymiarowa i ośrodkowa przestrzeń Banacha ma równoważną normę, przy której otrzymana przestrzeń ma jednocześnie własność Kadeca–Klee’ego i własność Opiala.

W oparciu o uogólnioną normę Daya opisaną w rozdziale 3, Autorka konstruuje w rozdziale 5 normę typu Daya w dowolnej ośrodkowej, nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha. Wobec generalnie dokładnej w pracy argumentacji dowodowej, przydałoby się uzasadnienie, że dla dowolnej ośrodkowej przestrzeni Banacha istnieje rozdzielający ciąg funkcjonałów punktowo zbieżny do zera. Doktorantka modyfikuje w tym rozdziale metodę M.A. Smitha przypisując w odpowiedni sposób każdemu elementowi rozważanej przestrzeni X , element przestrzeni $c_0(\Gamma)$, a następnie definiując nową normę na X jako uogólnioną normę Daya przypisanego elementu.

Wyniki rozdziału 5 zostały wykorzystane w rozdziale 7, gdzie zbliżamy się już do głównego rezultatu pracy, tj. twierdzenia 8.3 pozostając na razie w klasie przestrzeni ośrodkowych i refleksywnych. W rozdziale 8 Autorka uwalnia się od założenia ośrodkowości pokazując, że dla dowolnej nieskończenie wymiarowej i refleksywnej przestrzeni Banacha istnieje równoważna norma, przy której przestrzeń jest lokalnie jednostajnie wypukła oraz istnieje zbiór diametralnie zupełny o pustym wnętrzu. Ten wynik był zainspirowany przez twierdzenie E. Maluty i P.L. Papi-niego z 2015 r., którzy wykazali istnienie takiego zbioru w dowolnej nieskończenie wymiarowej i refleksywnej przestrzeni Banacha mającej słabą własność Opiala

¹Początkujący czytelnik widząc po raz pierwszy definicję przestrzeni $c_0(\Gamma)$ mógłby zapytać, jakie funkcje ciągle należą do $c_0(\mathbb{R})$.

i nie posiadającej struktury normalnej. Metoda Autorki polegała bowiem na pokazaniu, że każdą nieskończenie wymiarową, ośrodkową i refleksywną przestrzeń Banacha można tak przynormować, by spełnione były założenia wspomnianego wyżej twierdzenia Maluty–Papiniego.

Krótkie, półtorastronnicowe rozdziały 11 i 13 dotyczą problemu istnienia zbiorów o stałej szerokości i pustym wnętrzu w przestrzeniach Banacha posiadających bezwarunkową bazę Schaudera. Ostatni rozdział zawiera 18 przykładów, które porównują zakres stosowań twierdzeń z wcześniejszych rozdziałów.

Co do strony redakcyjnej, to praca napisana jest starannie, chociaż przy tak dużej objętości trudno było ustrzec się pewnych usterek. Wymienię kilka z nich, chociaż nie mają one wpływu na moją, zdecydowaną pozytywną opinię o tej pracy.

- (1) Str. 5, l. 15-16: jest ‘z pustym wnętrzem’ i ‘z baza Schaudera’.
- (2) Str. 8, l. 8: jest ‘ $\lim_n u^n < \infty$ ’, a powinno być ‘ $|\lim_n u^n| < \infty$ ’.
- (3) Str. 10, l.-3: na końcu powinien być kwadrat różnicy, a nie różnica kwadratów.
- (4) Str. 17, l.-4: jest ‘rózowartościową’.
- (5) Str. 21: w 3 miejscach jest ‘róznowartowartościowa’.
- (6) Str. 95, l.-6: należy dwukrotnie wykreślić wyrażenie ‘ $x =$ ’.
- (7) Str. 96: w [2] brak roku wydania.
- (8) Drobne usterki (brak spacji, niekonsekwentne używanie myślników, niepoprawna czcionka, brak przecinków lub kropek) w pozycjach [15, 16, 17, 26 (tu powinno być 1), 27, 32, 33, 35, 57, 58, 60, 73 (różna pisownia nazwiska Mil’man), 92, 98].
- (9) Str. 99: w [48] jest ‘iterior’.

Jak widać jednak, musiałem czynić duże starania, by znaleźć jakieś usterki redakcyjne.

Uważam, że praca doktorska Pani Walczyk zawiera wiele nowych, interesujących, a przy tym wysoce nietrywialnych wyników. Doktorantka wykazała się dużą wiedzą w zakresie zaawansowanych technik analizy funkcjonalnej i umiejętnością rozwijania i modyfikowania metod dowodowych stosowanych przez wybitnych specjalistów z analizy funkcjonalnej takich jak, m.in., M.I. Kadec, D. van Dulst, J. Rainwater, M.A. Smith, B. Turett, P.L. Papini i E. Maluta. Podobało mi się, że na początku rozdziałów zawierających nowe wyniki Doktorantka ujawnia, jakie prace były dla niej inspiracją do rozwinięcia własnych metod dowodowych. Należy podkreślić, że często jednak nie były to proste modyfikacje, a zapewne też nie było łatwo skojarzyć, które metody mogą okazać się przydatne przy badaniu konkretnego problemu. Można by rozważyć wystąpienie z wnioskiem o wyróżnienie tej rozprawy, gdyby było wiadomo, że wkład Doktorantki w uzyskanie głównych wyników był odpowiednio wysoki.

Moim zdaniem rozprawa doktorska Pani mgr Marioli Walczyk spełnia wymogi Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (art. 13, pkt 1), toteż wnioskuję o dopuszczenie Pani Walczyk do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "J. Jachymski".