

dr hab. inż. Bożena Piątek, prof. Pol. Śl.
Katedra Matematyki
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska w Gliwicach
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Gliwice, 4.05.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marioli Walczyk

Pani mgr Mariola Walczyk przedstawiła rozprawę doktorską pod tytułem

Zbiory diametralnie zupełne z pustym wnętrzem

Pani magister Mariola Walczyk jest współautorką sześciu prac opublikowanych w latach 2017 – 2021:

- M. Budzyńska, A. Grzesik, M. Kot, The generalized Day norm, Part I: Properties, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 71, No. 2, 33-49 (2017)
- M. Budzyńska, A. Grzesik, M. Kot, The generalized Day norm, Part II: Applications, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 71, No. 2, 51-62 (2017)
- J. Banaś, M. Kot, On regulated functions, J. Math. Appl. 40, 21-36 (2017).
- M. Budzyska, W. Kaczor, M. Kot, T. Kuczumow, Schauder bases, LUR Banach spaces and diametrically with empty interior, J. Nonlinear Convex Anal. 20, No. 2, 197-213 (2019).
- M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, M. Walczyk, Existence of diametrically complete sets with empty interior in reflexive and separable Banach spaces, J. Funct. Anal. 278, No. 7, Article ID 108418, 22 p. (2020).
- W. Kaczor, T. Kuczumow, S. Reich, M. Walczyk, Renormings of nonseparable reflexive Banach spaces and diametrically complete sets with empty interior, Taiwanese J. Math. 25, No. 4, 743-755 (2021).

Recenzowana praca oparta jest w dużej mierze o wyniki z pięciu z tych artykułów (poza trzecim). Tak duża liczba współautorów niestety nie pomaga w ustaleniu stopnia samodzielności badań prowadzonych przez doktorantkę. Także w pracy dociekliwy czytelnik nie znajdzie tego typu informacji. Sama praca doktorska składa się z dziewiętnastu rozdziałów, przy czym rozdziały pierwszy, drugi, szósty, dziewiąty, dziesiąty, dwunasty i czternasty mają charakter wstępny i nie zawierają wyników autorstwa pani magister Walczyk, natomiast ostatnie cztery to dodatki.

Niech C będzie diametralnie zupełnym podzbiorem przestrzeni Banacha. Jeżeli przestrzeń ma skończony wymiar, to oczywiście zbiór C ma niepuste wnętrze. Sytuacja zmienia się diametralnie, gdy rozważamy przestrzeń nieskończenie wymiarową. Wówczas zbiór diametralnie zupełny może mieć puste wnętrze, ale wówczas jest zbiorem diametralnym (patrz twierdzenie 3.2 z pracy J. P. Moreno, P. L. Papiniego oraz R. R. Phelps'a *Diametrically Maximal and Constant Width Sets in Banach Spaces* oznaczonej [74]). Zatem przestrzeń Banacha nie ma struktury normalnej, czyli nie może być jednostajnie wypukła. W tej samej pracy pojawiło się otwarte pytanie o istnienie tego typu zbiorów w przestrzeniach, które są „tylko” lokalnie jednostajnie wypukłe. Pierwszy pozytywny wynik zawiera praca E. Maluty *A diametrically complete set with empty interior in a reflexive LUR space* (oznaczonej [64]) z 2017 roku, w którym autorka wskazała przykład takiego przenormowania dla przestrzeni Hilberta l^2 , dla którego przestrzeń jest przestrzenią LUR i zawiera zbiór diametralnie zupełny o pustym wnętrzu. Praca doktorska pani Walczyk poświęcona jest możliwym uogólnieniom tego wyniku.

W dalszej części przejdę do omówienia kolejnych rozdziałów pracy poza kilkoma mającymi charakter wyłącznie wprowadzający, jak zostało to już wyszczególnione wcześniej.

Rozdział trzeci pracy poświęcono uogólnieniu normy Daya na przestrzeni $c_0(\Gamma)$ poprzez wprowadzenie ciągu parametrów β oraz uogólnieniu potęgi p . Wprowadzona parametryzacja podnosi stopień trudności dowodzenia na przykład lokalnej jednostajnej wypukłości przestrzeni $c_0(\Gamma)$ z nowo wprowadzoną normą (twierdzenie 3.2), ale nadal opiera się na schemacie z pracy J. Rainwatera *Local uniform convexity of Day's norm on $c_0(\Gamma)$* (oznaczonej [83]) oraz własnościach szeregów liczbowych rzeczywistych. W dalszej części pokazano także, że zdefiniowana przestrzeń ma słabą własność Opiala, tym razem posiłkując się pomysłem E. Maluty z pracy *A diametrically complete set with empty interior in a reflexive LUR space* (oznaczonej [64]). Należy w tym miejscu podkreślić, że dowody zaprezentowane przez panią Walczyk są bardzo szczegółowe i precyzyjne, aczkolwiek pochodzą z pracy współautorskiej *The generalized Day norm, Part I:*

Properties.

Kolejny, choć krótki, rozdział zawiera dowód twierdzenia o istnieniu w nieskończonej wymiarowej ośrodkowej przestrzeni Banacha równoważnej normy, z którą przestrzeń ma własności Kadeca-Klee'ego i Opiala, a także jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku. Przedstawiony dowód pochodzi tym razem z pracy Existence of diametrically complete sets with empty interior in reflexive and separable Banach spaces.

Piąty rozdział zawiera już uogólnienia normy Daya w przypadku ośrodkowych przestrzeni Banacha oraz podstawowe ich własności, między innymi własność Kadeca – Klee'ego (twierdzenie 5.3) oraz słabą własność Opiala (twierdzenie 5.2) w przypadku, gdy odpowiednie własności ma przestrzeń wyjściowa. Twierdzenia te stanowią w pewnym sensie uogólnienia wyników otrzymanych w rozdziale trzecim dla przestrzeni $c_0(\Gamma)$ i czwartym, a ich dowody także są oparte na tych samych schematach.

Główne wyniki pracy doktorskiej zawierają rozdziały począwszy od siódmego. W tym to rozdziale zawarte jest pierwsze twierdzenie dotyczące istnienia zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem w przestrzeniach lokalnie jednostajnie wypukłych, a bardziej precyzyjnie, odpowiedź na pytanie o istnienie w przestrzeni Banacha takiej normy równoważnej, aby z nią przestrzeń była lokalnie jednostajnie wypukła i miała zbiór diametralnie zupełny o pustym wnętrzu. Rozdział ten zawiera odpowiedź twierdzącą w przypadku, gdy przestrzeń Banacha jest ośrodkowa i refleksywna. Wynik ten pochodzi z pracy Existence of diametrically complete sets with empty interior in reflexive and separable Banach spaces. W kolejnym, ósmym rozdziale ten sam wynik w przestrzeni nieośrodkowej, dzięki zastosowaniu twierdzenia D. Amira i J. Lindenstraussa o istnieniu projekcji z podprzestrzeni ośrodkowej (patrz Lemat 4 z pracy oznaczonej [2]), udaje się zredukować do przypadku z wcześniejszego rozdziału.

W rozdziale dziesiątym wprowadzone zostaje węższe pojęcie zbioru o stałej szerokości. Kolejny jedenasty rozdział zawiera twierdzenie o przenormowaniu gwarantującemu istnienie zbiorów o stałej szerokości i pustym wnętrzu w przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$. A w trzynastym rozdziale autorka uogólnia ten wynik na przestrzenie nieośrodkowe z rozszerzoną bazą bezwarunkową. Warto wspomnieć, że wyniki te nie zostały jeszcze opublikowane.

W ostatnim rozdziale, piętnastym, autorka przedstawiła szeroką klasę przykładów przestrzeni, w których można stosować wyniki przedstawione we wcześniejszych rozdziałach. Dokonała także porównania swoich rezultatów oraz wyników z innych prac dotyczących tego samego problemu.

Ponadto, praca zawiera cztery dodatki zawierające między innymi alternatywne

dowody podanych twierdzeń. Większość wyników przedstawionych w tym miejscu nie została jeszcze opublikowana, co pozwala przypuszczać, że powstały samodzielnie.

Mimo dużej staranności przedstawionej pracy doktorskiej, wkradło się do niej kilka drobnych usterek:

10₃ Prawa strona nierówności powinna być w postaci $(\|x\| - \|x_n\|)^2 \geq 0$.

95₆₋₇ Niefortunne oznaczenie: Jeżeli $x = \sum_{i \in I} a^i x_i (\dots)$, to sumy $x = \sum_{i \in I} a^i_+ x_i$ i $x = \sum_{i \in I} a^i_- x_i \dots$. Bardziej czytelne byłyby oznaczenia tak jak na stronie 68: x^+ oraz x^- .

Konkluzja

Pomimo sporego problemu z ustaleniem faktycznego wkładu własnego pani magister Walczyk, przedstawioną mi pracę oceniam wysoko. Autorka zajmuje się niebanalnymi problemami i otrzymała bardzo dużą liczbę interesujących wyników. Stąd też **wnoszę o dopuszczenie mgr Marioli Walczyk do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Piętelc Bożena