

dr hab. Zbigniew S. Szewczak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 27.08.2021

Recenzja rozprawy doktorskiej

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sum zmiennych losowych i pól losowych

mgr Agnieszki Moniki Gduli

dla Rady Naukowej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Marii
Curie-Skłodowskiej

Rozprawa doktorska przedłożona Radzie Naukowej Instytutu Matematyki UMCS dotyczy mocnych praw wielkich liczb (MPWL) dla sum zależnych i niezależnych zmiennych losowych multi-indeksowanych deterministycznie lub losowo.

W znanej monografii o polach losowych¹ autor zauważa:

"There are a number of compelling reasons for studying random fields, one of which is that, if and when possible, multiparameter processes are a natural extension of existing one-parameter processes. More exciting still are the various interactions between the theory of multiparameter processes and other disciplines, including probability itself. For example (...) real and functional analysis, a modicum of group theory, and analytic number theory. The multiparameter processes also arise in applied contexts such as mathematical statistics, statistical mechanics and brain data imaging."

Dodajmy do tego motywację podaną w [42]² dotyczące zbiorów losowych:

"The theory of random sets is viewed as a natural generalization of probability and statistics on random vectors, i.e., of multivariate statistical analysis."

¹D. Khoshnevisan, Multiparameter processes: an introduction to random fields, Springer, 2002

²odnośniki jak w Bibliografii dysertacji

Random set data can be also viewed as imprecise/incomplete observations which are frequent in today's technological societies. As models for set-valued observations as well as for the process underlying the gathering of perception-based information, via coarsening schemes, random sets are a new type of data. As such, new mathematical tools for statistical inference and decision making need to be developed. In the foreword to Matheron's book on random sets [73]³, G. Watson expressed his vision of statistics as follows:

Modern statistics must be defined as the applications of computers and mathematics to data analysis. It must grow as new types of data are considered and as computing technology advances.”

Zauważmy także, że przy badaniu twierdzeń granicznych dla pól losowych tradycyjne metody dowodzenia niekiedy zawodzą (zob. Chapter 1 w [32]⁴). Przytoczone argumenty dają wystarczającą motywację do badań które stanowią treść dysertacji mgr A. M. Gduli.



Praca składa się ze Wstępu, pięciu rozdziałów, wykazu skrótów i oznaczeń oraz bibliografii (53 pozycje). Wstęp zawiera wprowadzenie do tematyki mocnych praw wielkich liczb oraz opis najważniejszych wyników zawartych w kolejnych rozdziałach. Opisano także relacje między różnymi wariantami sumowania zmiennych losowych. Według mnie brak jest jednak zaznaczenia wkładu matematyków polskich, choćby okresu przedwojennego, który jest znaczący. W literaturze probabilistycznej jednym z częściej cytowanych rezultatów⁵ jest MPWL Marcinkiewicza–Zygmunda⁶. Jedną z pierwszych prac Banacha⁷ dotyczy MPLW dla zmiennych ortogonalnych. Mazurkiewicz⁸ w 1922 podał MPLW niezależnie od Cantellego⁹. Rajchman¹⁰, metodą podcią-gów, udowodnił jedno z pierwszych MPLW dla zależnych (dokładniej niedo-

³w Bibliografii pracy pozycja [39]

⁴np. lemat Kroneckera dla pól losowych zachodzi w ograniczonym zakresie (Proposition A.9, s. 421 w [32])

⁵ok. 600 w Google Scholar

⁶J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, Sur les fonctions indépendantes, Fund. Math. 29 (1937) 60–90

⁷S. Banach, Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Lettres, Classe Sci. Math. Natur. Sér. A (1919) 66–72

⁸S. Mazurkiewicz, O pewnej nowej formie uogólnienia twierdzenia Bernoulli’ego, Wiadomości Aktuarjalne I (1922) 3–8.

⁹<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mazurkiewicz/>

¹⁰A. M. Rajchman, Zaostrzone prawo wielkich liczb, Mathesis Polska 6 (1931) 145–161



datnio skolerowanych) zmiennych losowych ¹¹. MPWL Rajchmana znalazło trwałe miejsce we współczesnych podręcznikach i monografiach ^{12 13 14 15}.

W rozdziale pierwszym przedstawiono znane wyniki pracy [13]¹⁶ opublikowanej w *Probability and Mathematical Statistics*. Rozpatrywany tu problem dotyczy dwuwymiarowych krat niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie. Identyfikowane są klasy zbiorów $\mathcal{C}$ takich, że dla $V \in \mathcal{C}$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in V}} |n|^{-1} \sum_{1 \leq k \leq n} X_k = \mu \iff \left[E(X_1) = \mu \quad \& \quad \sum_{n \in V} P(|X_1| > |n|) < \infty \right]. \quad (1)$$

W szczególności są to podzbiory typu $V = \{(n_1, n_2) : g(n_1) \leq n_2 \leq f(n_2)\}$, gdzie $g(x) \leq x \leq f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dlatego, uzyskane wyniki idą dalej niż rezultaty Indlekofera, Klesova i Rychlika odpowiednio w [28] i [33]. Wprowadzono trzy rodziny podzbiorów $\mathbb{N}^d$ dla których jest spełniona równoważność (1)¹⁷. Podano także relacje między tymi rodzinami jak i przykłady świadczące o tym, że rodziny te nie zawierają się w sobie. Dowody bazują na Twierdzeniu 1 z [28] i [34].

Rozdział drugi opiera się na pracy [16] przyjętej do druku w *Lithuanian Mathematical Journal*. Rozważane są sumy niezależnych zmiennych losowych X_n , $n \geq 1$ indeksowane zbiorami losowymi $A_n \subseteq A_{n+1}$, p.w., niezależnymi od X_n i takimi, że $P(\sup\{k : k \in A_n\} \leq \bar{\alpha}_n) = 1$ dla pewnego ciągu liczb dodatnich $\bar{\alpha}_n$ ¹⁸. Główny wynik, Twierdzenie 2.2, jest uogólnieniem rezultatu Hu i Webera z pracy [27] na przypadek indeksowania zbiorami losowymi. W twierdzeniu 2.2 są tak naprawdę dwa twierdzenia. Przypadek abc), który dla

¹¹E. Seneta, A Tricentenary history of the Law of Large Numbers, Bernoulli 19 (4) (2013) 1088–1121

¹²K. L. Chung, A course in probability theory, 3rd ed., Academic Press, 2001 (Th. 5.1.2, p.108)

¹³U. Krengel, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 8. Auflage, Springer, 2005 (Satz 12.4, s.154)

¹⁴M. M. Rao, J. W. Swift, Probability theory with applications, 2nd ed., Springer, 2006 (Th.4, p.61)

¹⁵T. K. Chandra, Laws of Large Numbers, Narosa Publishing House, New Delhi, 2012 (Th. 3.1.2, p.134)

¹⁶DOI:10.19195/0208-4147.37.1.8

¹⁷zauważmy niekonsekwencję w oznaczeniach, gdyż $| \cdot |$ występuje w podwójnej roli modułu oraz mocy (zbioru)

¹⁸zauważmy niezgodność w oznaczeniach z rozdziałem 1: $\sup$ występuje w podwójnej roli ciągu oraz supremum

$A_n = \{1, \dots, n\}$ jest znanym twierdzeniem Kolmogorowa–Brunka–Chunga–Prokhorowa–Wittmanna (prawdziwym dla zależnych ciągów zmiennych losowych¹⁹ 106 (2015) 129–133) oraz przypadek d) z warunkami (2.13) i (2.14) bardzo silnie wiążącymi zmienne X_n . W dowodzie wykorzystuje się nierówności martyngałowe Burkholdera i Dooba co sugeruje, że w tym twierdzeniu tkwi jeszcze pewien potencjał w zakresie zależnych zmiennych X_n . Podany przykład 2.1 pokazuje, że uzyskany wynik jest istotnie lepszy od rezultatu Hu i Webera.

Rezultaty rozdziału trzeciego stanowią uogólnienie wyników uzyskanych w [46] przez Rosalsky’ego i Stoicę. Wyniki te zawarte są w pracy [15], która jest w recenzji w *Periodica Mathematica Hungarica*. Podobnie jak w rozdziale 2 zmienne są indeksowane zbiorami losowymi, przy czym zbiory te są indeksowane kratą $\mathbb{N}^d$. Główny wynik, Twierdzenie 3.2²⁰, jest też uogólnieniem wcześniejszych rezultatów z [44], [38] dla dowolnie zależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Dowód opiera się na Lemacie 3.2²¹ oraz wspomnianym wcześniej wariancie lematu Kroneckera dla pól losowych.

Rozdział czwarty zawiera rezultaty opublikowane w *Publicationes Mathematicae* [14]²². Wyniki bazują na publikacjach [11],[43] i dotyczą prawie pewnej zbieżności logarytmicznej (ang. almost sure distributional limit theorems) dla pól losowych typu produktowego. Co prawda tytuł rozdziału sugeruje zbieżność do rozkładu normalnego jednak główny wynik, Twierdzenie 4.2, dotyczy MPLW dla pól losowych indeksowanych zbiorami spełniającymi warunki α –mieszania²³. Podane są także przykłady zastosowania Twierdzenia 4.2 dla indeksów losowych i zbieżności do mieszanek rozkładów stabilnych. Uważam, że warto kontynuować te badania w kierunku silnie mieszających, stacjonarnych pól losowych (zob. Chapter 29²⁴)

Rezultaty pracy [12]²⁵ opublikowane w *Demonstratio Mathematica* stano-

¹⁹F. Merlevède, M. Peligrad, S. Utev, Functional Gaussian Approximation for Dependent Structures, Oxford, 2019

²⁰w pracy nie doszukałem się wcześniej definicji symbolu e_j

²¹zob. Lemma 3.6'' w M. Loève, On almost sure convergence, Proc. 2nd Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probab., Univ. Calif. Press (1951), pp. 279-303

²²DOI: 10.2478/dema-2014-0018

²³w założeniach twierdzenia 4.2 brakuje jednak sformułowanego wyrażnie warunku mieszania

²⁴R. C. Bradley, Introduction to strong mixing conditions. Vol. 1–3. Kendrick Press, Heber City, UT, 2007

²⁵DOI: 10.5486/PMD.2021.8862

wią treść rozdziału piątego i dotyczą twierdzenia typu Bauma-Katza dla pól losowych będącego uogólnieniem wyniku Hak Sunga z publikacji [50]. Główny wynik, Twierdzenie 5.2, mówi o zbieżności kompletnej dla stochastycznie zdominowanych pól losowych²⁶. Dowody operają się o warianty nierówności Rosenthala i Hoffmann-Jørgensena dla niezależnych pól losowych i są to typowe metody przy dowodzeniu zbieżności kompletnej. Warto nadmienić, że istnieją odpowiedniki tych nierówności dla zależnych zmiennych losowych (zob. ^{19 24}) wskutek czego wydaje się, że założenia Twierdzenia 5.2 mogą być osłabione.

★★★

Stustronicowa praca jest składanką pięciu prac napisanych wspólnie z promotorem, przy czym trzy prace są już opublikowane. Metody dowodów są dobrze znane. Dysertacja zawiera wiele przykładów, które w sposób właściwy ilustrują prezentowane tezy. Autorzy prac wykazali się dobrą znajomością przedmiotu. Uzyskane rezultaty uzupełniają naszą wiedzę o asymptotycznych własnościach multi-indeksowanych sum zmiennych losowych.

Mimo tak obszernego materiału liczba usterek i literówek nie jest nadmierna. Niektóre z nich (nie mające zresztą większego wpływu na ocenę merytoryczną pracy) zamieszczono poniżej.

s.7, l. -1: brak definicji $\underline{e}_j$ (zob. s.53)

s.10, l. -1: a_n^2 , $a_n \rightarrow \infty$

s.13, l. -11: oraz w T. K. Chandra, S. Ghosal, Extensions of the strong law of large numbers of Marcinkiewicz and Zygmund for dependent variables, Acta Math. Hungar. 71 4 (1996) 327–336.

s.13, l. -9: typu

s.15, l. 12: równością

s.40, l. -8: Burkholder'a

s.44, l. -5: borelowskich

s.52, l. -9: niescentrowane

s.53, l. -10: $\underline{e}_j$ niezdefiniowane

s.57, l. 1: $\underline{e}_j$ powinno być zdefiniowane na s.7

s.59, l. 2: wektor losowy Y przyjmujący wartości w $\mathbb{N}^d$

s.59, l. -1: 3.1 niezdefiniowane

s.60, l. -7: nierówności Markowa dla funkcji wykładniczej

²⁶w definicji 5.1 lub w tw. 5.2 powinno być założenie o niezależności zmiennych X_n

s.65, l. -14: funkcję charakterystyczną zbioru
 s.72, l. 2: brak (przed g oraz) po A_k
 s.72, l. 3: brak (przed g oraz) po A_k
 s.72, l. 7: brak (przed g oraz) po A_k
 s.83, l. -17: Prop. 6.7 Hoffmanna-Jørgensena
 s.85, l. 2: nierówność Marcinkiewicza-Zygmunda jest prawdziwa dla $p = 1$
 s.89, l. -11: borelowskimi
 s.100, l. 4: MatSciNet: I. Molchanov, *Theory of Random Sets*, Probability and its Applications (New York), Springer, 2005.

★★★

Uważam, że rozprawa doktorska *Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sum zmiennych losowych i pól losowych* spełnia wymagania ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym i może stanowić podstawę do nadania stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Dlatego wnoszę o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie mgr A. M. Gduli do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


 Zbigniew S. Szewczak