

Zbigniew A. Łagodowski, dr hab.
Katedra Matematyki
Politechnika Lubelska

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Agnieszki Gduli
MPWL dla sum zmiennych losowych i pól losowych

1. Wstęp

Rozprawa doktorska p. mgr Agnieszki Gduli liczy 101 stron. Składa się ze wstępu oraz pięciu rozdziałów i bibliografii zawierającej 53 pozycje. Pierwsza część wstępu to podstawowe, historyczne fakty dotyczące praw wielkich liczb, w części drugiej dosyć szczegółowe wprowadzenie w przedmiot rozprawy i umiejscowienie w bieżącym nurcie badań praw wielkich liczb. Zasadnicza część rozprawy merytorycznie jest bardzo spójna. Wszystkim wynikom można nadać jedną wspólną cechę – badanie mocnych praw wielkich liczb na podciągach. Ten cel jest różnie realizowany: poprzez wybór górnej granicy sumowania w pewnym nieograniczonym podzbiorze $\mathbb{N}^2$ (rozdz. 1), sumowanie po losowych podzbiórach $\mathbb{N}^d$ (rozdz. 2, 3 i 4). Wprawdzie ostatni rozdział pracy dotyczy twierdzenia typu Bauma-Katza dla losowo ważonych sum pól losowych ale tutaj również możemy zobaczyć wynik dla losowych podciągów poprzez odpowiedni dobór tablicy wag.

Przedstawione w rozprawie wyniki zostały opublikowane w następujących czasopismach *Probability and Mathematical Statistics*, [13] – rozdział 1, *Lithuanian Mathematical Journal*, [16] – rozdział 2, *Demonstratio Mathematica*, [12] – rozdział 5 oraz przyjęte do druku w *Publicationes Mathematicae*, [14] – rozdział 4.

2. Omówienie rozprawy

W rozdziale pierwszym rozważane jest mocne prawa wielkich liczb dla pól losowych gdy górny indeks sumowania przebiega nieskończony podzbiór V przestrzeni $\mathbb{N}^2$ - punktów kratowych. Punktem odniesienia dla otrzymanych wyników są prace Rychlika i Klesova [33] oraz Indlekofera i Klesova [28]. Uogólnienia idą w kierunku określenia jak najobszerniejszej klasy funkcji, będących brzegiem obszaru V , w którym, dla dowolnego pola niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, następujące warunki są równoważne

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \underline{n} \in V} \frac{\sum_{i \leq \underline{n}} X_i}{|\underline{n}|} = \mu \quad (1)$$

oraz

$$EX = \mu \quad \text{ i } \quad \sum_{\underline{n} \in V} P[|X| > |\underline{n}|] < \infty. \quad (2)$$

W poszczególnych podrozdziałach wprowadzono klasy $C(F_i, G_i)$, $i = 1, 2, 3$ gwarantujące, w wyżej opisanym sensie, równoważność warunków (1) i (2). Wprowadzone klasy można scharakteryzować własnościami brzegu obszaru: "o małym rozstępie", "skończonym wahaniu" i "rozstępie brzegu uzależnionym od wartości funkcji". W czytaniu tego rozdziału przeszkadzał mi brak rygoru definiowania zbiorów $C(F_i, G_i)$, klarownego przekazu kiedy rozważamy grafy, kiedy i jakie funkcje. O tym szczegółowiej w uwagach końcowych. Ostatni podrozdział poświęcony przykładom, które pokazują wzajemne relacje między zdefiniowanymi klasami. Oczywiście otrzymane wyniki określają obszerniejsze klasy funkcji niż w cytowanych pracach [28] i [33] ale nie znalazłem żadnej dyskusji na ile jest to nietrywialne uogólnienie.

Na koniec ważna uwaga natury ogólnej. Cytowany na początku rozdziału wynik Guta, twierdzenie 1.1, gwarantował, że jeśli górny indeks sumowania zmiennych losowych należy do obszaru

$$V_\theta = \{(n_1, \dots, n_d) : \theta^{-1}n_i \leq n_j \leq \theta n_i, \text{ dla wszystkich } 1 \leq i < j \leq d\}, \quad \theta > 1,$$

to granica w (1) istnieje i jest skończona p.p. wtedy i tylko wtedy, gdy $E|X|$ istnieje. To znaczy otrzymano MPWL (prawo iterowanego logarytmu, również) przy założeniach jak dla ciągu zmiennych losowych i to jest esencja tego wyniku, lepszego nie można otrzymać. W rozprawie wątek dyskusji o momentach zmiennych losowych, który jest istotą rozważania MPWL w sektorze, został zupełnie pominięty.

Rozdział drugi rozpoczyna się od wyniku Hu i Webera [27] (tw. 1.1), którego treścią jest MPWL dla ciągów zależnych zmiennych losowych. Główną wartością tego wyniku jest osłabienie założeń dotyczących wariancji i struktury zależności - kowariancji. W rozprawie wynik ten jest przeformułowany dla sum częściowych branych po losowych zbiorach indeksów - na wzór i podobieństwo głównego wyniku rozdziału 2 - i ma to formę twierdzenia - twierdzenie 2.1. Pominięto założenia o zależności między ciągiem zbiorów losowych $\{A_n, n \geq 1\}$ i ciągiem zmiennych losowych $\{X_n, n \geq 1\}$. Rozumiem więc, że to przeformułowanie twierdzenia jest świadomym zabiegiem pozwalającym porównywać główny wynik rozdziału z wynikiem Hu i Webera. Moim zdaniem zdecydowanie wymaga to komentarza. W konsekwencji pojawiają się dalsze pytania pozostające bez odpowiedzi. Twierdzenie 2.2 rozprawy sformułowane jest dla ciągu niezależnych zmiennych losowych, podczas gdy wynik Hu i Webera dla zmiennych losowych zależnych. Dlaczego więc porównujemy oba wyniki? Wydaje się to bezzasadne. Nie zmienia to faktu, że otrzymano nowe MPWL, dla momentów rzędu $2q$, $q \geq 1$. W dowodzie twierdzenia 2.2 głównym narzędziem jest metodyka dowodzenia MPWL wprowadzona przez Fazekasa i Klesova [11], tutaj użyta w wersji z indeksowaniem losowymi zbiorami, również w wersji "losowej" zastosowano nierówność Burkholdera i Dobob. Podobnie jak powyżej, przynajmniej szkic uzasadnienia dlaczego wersje losowe tych wyników możemy stosować, powinien się znaleźć, chociażby pokazując, że doktorantka ma świadomość braku automatyzmu w przenoszeniu tych twierdzeń, zwłaszcza, że w publikacji też są pominięte wszelkie uzasadnienia, poza odesłaniem do pracy [11], a doktorantka nie ma żadnej pracy samodzielnej. Tym bardziej rozprawa nie powinna być tłumaczeniem publikacji na język polski. Z kolei w innym miejscu rozprawy jest podane wyjaśnienie stosowania nierówności Czebyszewa.

W rozdziale trzecim, rozważania ponownie wracają do problematyki pól losowych w kontekście MPWL. Na początku przytoczony jest ważny wynik Rosalskiego i Stoicy [46], z 2010 roku, uogólniający klasyczne już MPWL Martikainena i Pietrova [38] dla zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i dowolnej strukturze zależności. Główny wynik tego rozdziału to twierdzenie 3.2, rodzaj założeń wskazuje na analogon twierdzenia Martikainena i Pietrova dla sum zmiennych losowych, z wielowymiarowym indeksem, sumowanych po zbiorach losowych. Wniosek 3.1 pozwala otrzymać twierdzenie 2.2 a wniosek 3.2 wraz założeniami (3.1) i (3.2) dają cytowane twierdzenie Rosalskiego i Stoicy. Dowód głównego wyniku oparty jest na dwóch dosyć prostych lematach 3.1 i 3.2. Pierwszy z nich to własności przyrostów pól losowych, dowiedziony indukcyjnie, drugi mówiący o zbieżności szeregu nieujemnych pól losowych gdy szereg momentów jest zbieżny. Prawo wielkich liczb w twierdzeniu 3.2 nie wymaga istnienia pierwszego momentu, twierdzenie 3.3 otrzymuje takie założenie i pokazuje wpływ centrowania na MPWL. Prosta konsekwencją twierdzenia 3.1 jest twierdzenie 3.4, które podaje "nielosowe" MPWL dla sum postaci

$$S_{\underline{n}}(\epsilon) = \sum_{k \leq \underline{n}} \epsilon_k X_k,$$

gdzie $\epsilon = \{\epsilon_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem losowym, dwupunktowych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i wartościach 0 lub 1. Taka suma może być interpretowana jako wynik obserwacji, które są skuteczne z pewnym prawdopodobieństwem.

Rozdział czwarty jest poświęcony prawie pewnemu centralnemu twierdzeniu granicznemu, z głównym wynikiem podanym w twierdzeniu 4.2. W dowodzie wykorzystane jest twierdzenie 4.1 będące wersją twierdzenia 2.1 autorstwa Fazekasa i Rychlika [11]. Otrzymany wynik jest nowy i ciekawy ale trudno mi zaakceptować tak nieprecyzyjny komentarz, cytując

"Nasze wyniki uogólniają znane dotąd wyniki w następujących kierunkach:...."

Rozumiem, że autorka ma na myśli cytowane prace: Fazekas, Rychlik [11] i Noszály, Tómacs[43]. Pierwsza z tych prac podaje bardzo ogólny wynik dla elementów losowych w przestrzeni Banacha (przypominam, że twierdzenie z tej pracy pozwala dowieść tw. 4.2) i trudno to porównywać z twierdzeniem 4.2 rozprawy, otrzymanym dla niezależnych zmiennych losowych. Nie wiem do jakiego fragmentu pracy [43] odniesione są uwagi o uogólnieniu. Sadzę, że warto było się odnieść do innych, nowszych wyników, na przykład: Terekhova (2009) *Almost sure limit theorems for random sums of multiindex random variables*, Chuprunov i Terekhova (2010) *Almost sure versions of limit theorems for random sums of multiindex random variables* lub kilku innych.

Rozdział piąty składa się z trzech części i wstępu, w którym podano ogólne informacje o kompletnej zbieżności oraz wynik Soo Huk Sunga [50], twierdzenie 2. Część pierwsza zawiera główny wynik, który jest uogólnieniem cytowanego twierdzenia typu Bauma-Katza, w trzech kierunkach: zamiast ciągu zmiennych losowych rozważane jest pole zmiennych losowych $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, zakres sumowania po obszarze całej przestrzeni indeksów $\mathbb{N}^d$ lub po sektorze V_{θ} i co najważniejsze wprowadzenie losowości tablicy wag $\{a_{n,i}, n, i \geq 1\}$, które teraz stają się wspólnie ograniczonymi przez stałą zmiennymi losowymi. Ten ostatni kierunek uogólnień powoduje, że nawet w przypadku $d = 1$, otrzymany wynik jest nowym i wyznacza nowe zadania dla zbieżności i szybkości zbieżności losowo ważonych MPWL. Zdecydowana

większość wysiłków innych badaczy była skupiona na relaksacji założeń o deterministycznej tablicy wag lub pola losowego $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$. Druga część rozdziału zawiera lematy pomocnicze, niektóre z nich to dobrze znane nierówności: Hoffmanna-Jørgensena lub Rosenthala, w wersji dla pól losowych, lub oszacowanie momentów obciętych zmiennych losowych. Część trzecia zawiera dowody głównego wyniku i wniosków, oparte na lematach z poprzedniej części, nierównościach Marcinkiewicza i Jensesna oraz c_r nierówności. Wyniki przedstawione w tym rozdziale uważam za interesujące.

Uwagi ogólne

Bardzo przeszkadza mi dosyć częsty brak precyzji w formułowaniu twierdzeń, klarowności definicji, opisów i komentarzy. Oto kilka przykładów.

1. Definicja 1.4 – brak informacji co oznacza symbol $f(x)$ a uwagi o f pojawiają się dopiero później, komentarz poniżej.
2. Przed definicjami zbiorów F_i , G_i , $i = 3, 4, 5$ mówimy, że będziemy określać zbiory funkcji ale już na tej samej stronie - 114, str. 25, mamy w dowodzie twierdzenia 1.6 ... "funkcje f i g odpowiednio z rodzin funkcji F_4 i G_4 , mogą być nieciągłe. Jeśli na przykład $f(x_0 - 0) = y_0 < y_1 = f(x_0 + 0)$, to "uzupełniamy" definicję, kładąc $f(x_0) = [y_0, y_1]$ (cały przedział $[y_0, y_1]$)". Jaką definicję? Potem jest deklaracja "Oczywiście od tej chwili $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ nie jest funkcja ale ciągłym grafem, a f jest relacją,. Jednakże, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, dalej będziemy pisać nieformalnie "funkcja f ". i dalej w tekście znów brak konsekwencji.
3. Na tej samej stronie, Własność G. "...graf jest ciągły i jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_0) \leq f(x_3)$ ". Skoro f jest relacją to absolutnie należy doprecyzować ostatnią nierówność.
4. Inne uwagi tego typu zostały wymienione w zasadniczej części recenzji.

Inne drobne uwagi

1. W założeniu tw. 2.6 zamiast "...oraz spełniającym warunek (2.6). ", powinien być: "...oraz spełniającym warunek (2.2).
2. W tw. 2.2 założono $E|X_n| < \infty, n \in \mathbb{N}$, natomiast założenia (2.10) i (2.11) wymagają istnienia momentów absolutnych rzędu $2q$, $q \geq 1$.
3. Tw. 3,2 – raczej należy unikać podawania oznaczeń w treści twierdzenia, zwłaszcza, że już wcześniej zostały podane w wykazie.
4. Jest "Łatwo sprawdzić, że warunek (3.19) wynika z (3.20)... " powinno być raczej "...warunek (3.19) wynika z (3.2)... "
5. W twierdzeniu 5.2 brak założenia $|a_{\underline{n}, \underline{i}}| < M$, p.p. dla $\underline{n}, \underline{i} \in V$ dla pewnej dodatniej stałej M .

Konkluzja

Dorobek publikacyjny doktorantki oceniam jako zupełnie zadowalający. Widać dużą staranność w przygotowaniu rozprawy, pewnie dlatego nie zauważyłem zbyt wielu literówek, drobnych pomyłek w dowodach lub bibliografii. Doceniam też starania doktorantki aby rozprawa miała charakter dobrego przewodnika po wynikach, podano dużo wniosków i co ważne liczne przykłady. Natomiast bardzo przeszkadza mi, to co podkreślałem wcześniej: całkiem niemało miejsc z brakiem precyzji lub niezbędnych wyjaśnień. Głównym obszarem teorii prawdopodobieństwa, w którym doktorantka wykazała się wiedzą i umiejętnościami pracy twórczej są Mocne Prawa Wielkich Liczb w różnych aspektach sumowania zmiennych losowych po zbiorach losowych aczkolwiek dowody wykorzystują idee pochodzące z prac innych autorów (jest to zawsze rzetelnie odnotowane).

Podsumowując, uważam, że opiniowana rozprawa doktorska wypełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje o dopuszczenie mgr Agnieszki Gduli do dalszych etapów, przewodu doktorskiego.

*Włodzisław
Zbigniew*