

Streszczenie rozprawy doktorskiej pt.

Charakteryzacje brzegowe zespolonych odwzorowań quasiregularnych koła jednostkowego na siebie

Autor: mgr inż. Magdalena Jastrzębska
Promotor: dr hab. Dariusz Partyka, prof. KUL

W 1987 roku Krzyż scharakteryzował brzegowe wartości odwzorowań quasikonforemnych koła jednostkowego $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ na siebie. Dokonał tego poprzez przeniesienie na okrąg jednostkowy $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ warunku quasi-symetrii Beurlinga-Ahlforsa dla rosnących homeomorfizmów osi rzeczywistej $\mathbb{R}$ na siebie. Dokładniej opisują to twierdzenia 4.1 i 4.2, które stały się inspiracją do napisania tej rozprawy. Jej motywem przewodnim jest uogólnienie wyników Krzyża na szerszą klasę odwzorowań, mianowicie na zespolone odwzorowania quasiregularne.

Rozdział pierwszy ma na celu uporządkowanie podstawowych faktów na temat odwzorowań quasiregularnych i quasikonforemnych. Odwzorowania te są określone na gruncie analizy rzeczywistej w przestrzeniach euklidesowych; por. podrozdziały 1.1 i 1.2. Z punktu widzenia analizy zespolonej szczególnie ważny jest przypadek takich odwzorowań w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Można je wówczas opisać w języku analizy zespolonej jako odwzorowania w płaszczyźnie zespolonej $E(\mathbb{C})$, o czym traktuje podrozdział 1.3. Określone w ten sposób zespolone odwzorowania quasiregularne stanowią naturalne uogólnienie funkcji holomorficznych, i przez to stają się interesującym obiektem badań.

W tej rozprawie rozważany jest problem charakteryzacji brzegowej quasiregularnych odpowiedników skończonych iloczynów Blaschkego. Pełne jego rozwiązanie jest przedstawione w rozdziale czwartym w postaci twierdzeń 4.4 i 4.7, które są głównymi wynikami tej rozprawy. Uogólniają one wspomnianą na początku charakteryzację brzegową Krzyża odwzorowań quasikonforemnych koła $\mathbb{D}$ na siebie. Precyzyjne sformułowanie tych twierdzeń oraz ich dowody wymagają szeregu faktów pomocniczych opisanych szczegółowo w rozdziałach drugim i trzecim. Pierwszy z nich dotyczy równania funkcyjnego

$$e^{i\varphi(z)} = f(e^{iz}) \quad z \in D,$$

z funkcją niewiadomą $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie D jest zadany pasem horyzontalnym, zaś $f : D' \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją zespoloną ciągłą w zbiorze $D' := \{e^{iz} : z \in D\}$. Istnienie globalnych rozwiązań tego równania przy dodatkowym założeniu różnowartościowości funkcji f jest wykazane w podrozdziale 2.2. W podrozdziale 2.3 badana jest różnowartościowość takich rozwiązań. Wyniki przedstawione w podrozdziałach 2.1–2.3 zostały użyte w podrozdziale 2.4 do zdefiniowania orientacji homeomorfizmów w przestrzeni $E(\mathbb{C})$. Przypomniano w nim również geometryczną charakteryzację odwzorowań quasikonforemnych w przestrzeni $E(\mathbb{C})$ oraz ich własności w zakresie niezbędnym w dalszej części rozprawy.

Wiodącym zagadnieniem rozdziału trzeciego jest uogólnienie klasycznego twierdzenia Fatou dla skończonych iloczynów Blaschkego na ich quasiregularne odpowiedniki. Fundamentalnym wynikiem dla rozważań w rozdziale czwartym jest wykazane w podrozdziale 3.3 twierdzenie 3.12, które jest wariantem twierdzenia Vuorinena; por. twierdzenie 3.1. Dwa wcześniejsze podrozdziały wspierają wypowiedź i dowód twierdzenia 3.12. W podrozdziale 3.1 zawarte są informacje na temat stopnia funkcji ciągłej w punkcie i jego własności. Są to znane fakty, a ich precyzyjne dowody zostały opracowane na podstawie podrozdziałów 2.1–2.3. Podrozdział 3.2 zawiera wariant wspomnianego twierdzenia Fatou, w którym osłabiono warunek brzegowy i dołączono informację o stopniach zer.

Ostatni rozdział — o czym już była mowa — zawiera główne wyniki rozprawy. W podrozdziałach 4.1 i 4.2 podane są szczegółowe dowody twierdzeń 4.4 i 4.7, odpowiednio. Uogólniają one twierdzenia 4.1 i 4.2, wykazane przez Krzyża; por. uwagi 4.5 i 4.8. Uogólnienie polega przede wszystkim na zastąpieniu odwzorowań quasikonforemnych koła $\mathbb{D}$ na siebie przez zespolone odwzorowania quasiregularne f w kole $\mathbb{D}$ takie, że $|f(0)| \neq 1$ i $CS(f) \subset \mathbb{T}$, gdzie $CS(f)$ jest zbiorem wszystkich punktów skupienia funkcji f na brzegu $\mathbb{T}$. W podrozdziale 4.3 są zebrane uwagi uzupełniające rozważania z poprzednich dwóch podrozdziałów oraz przykłady zastosowań twierdzenia 3.12, wyrażone przez wnioski 4.12 i 4.13. Pierwszy z nich dotyczy nierówności Schwarza, a drugi nierówności Mori’ego dla zespolonych odwzorowań quasiregularnych f w kole $\mathbb{D}$ spełniających warunek brzegowy $CS(f) \subset \mathbb{T}$.

Magdalena Jesenik