

dr hab. inż. Bożena Piątek, prof. Pol. Śl.
Katedra Matematyki
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska w Gliwicach
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Gliwice, 01.10.2021

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Sławomira Borzdyńskiego

Pan mgr Sławomir Borzdyński przedstawił rozprawę doktorską pod tytułem

Twierdzenia o punktach stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych względem słabych topologii

Fixed point theorem for semigroups of nonlinear mappings in weak topologies

Na wstępie należy nadmienić, że jest to druga recenzja pracy doktorskiej pana mgra Borzdyńskiego. Pierwsza wersja omawianej pracy, zgodnie z sugestią jednego z recenzentów została dnia 3. lutego 2020 roku skierowana przez Komisję d/s Przewodu Doktorskiego mgra Sławomira Borzdyńskiego do poprawy. Chodziło głównie o kwestie językowe.

Część wyników przedstawionych w omawianej rozprawie została już opublikowana w trzech artykułach autorstwa Doktoranta, w tym w dwóch napisanych wspólnie z promotorem dr hab. Andrzejem Wiśnickim, prof. UP:

- S. Borzdyński, A. Wiśnicki, A common fixed point theorem for a commuting family of weak* continuous nonexpansive mappings, Stud. Math. 225 (2) (2014), 173–181 (w dalszej części oznaczona [BoWi]).
- S. Borzdyński, A. Wiśnicki, Applications of uniform asymptotic regularity to fixed point theorems, J. Fixed Point Theory Appl. 18 (4) (2016), 855–866 (w dalszej części oznaczona [BoWi2]).
- S. Borzdyński, Common fixed point theorems for nonexpansive mappings using the lower semicontinuity property., Colloq. Math. 154 (2) (2018), 157–165 w dalszej części oznaczona [Bo]).

Jednakże w rozprawie wyniki te są często przedstawione w uogólnionej wersji.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. Dwa pierwsze mają charakter wstępny i dotyczą omówienia przedstawionych wyników (Rozdział I) oraz podstawowych własności półgrup odwzorowań związanych z przemiennością (Rozdział II). Centralną część przedstawionej rozprawy stanowią kolejne dwa rozdziały zawierające główne wyniki mgra Borzdyńskiego. Ostatni, piąty rozdział został poświęcony omówieniu przedstawionych we wcześniejszych rozdziałach wyników w świetle częściowej weryfikacji prawdziwości hipotezy Lau postawionej w pracy [A. Lau i Y. Zhang, Fixed point properties for semigroups of nonlinear mappings and amenability, *Journal of Functional Analysis* 263 (2012) 2949–2977] (por. także [A. Lau i W. Takahashi, Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 5 (1995) 39–57]) i dotyczącej równoważności dopuszczania lewostronnie niezmienniczej średniej i istnienia punktów stałych dla każdej reprezentacji tej półgrupy.

W dalszej części niniejszej recenzji zostaną omówione najistotniejsze wyniki poszczególnych rozdziałów z oczywistym pominięciem pierwszego i drugiego.

W rozdziale trzecim pan mgr Borzdyński skupił się na własnościach rodzin $\mathcal{S}$ odwzorowań regularnie nieoddalających, przy czym odwzorowania regularnie nieoddalające są tutaj rozumiane jako te, które spełniają warunek Brucka postaci

$$\|Tx - Ty\| \leq \|\alpha(x - y) + \bar{\alpha}(Tx - Ty)\|, \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha$$

(porównaj Definicję 6 w pracy [R.E Bruck, Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces, *Pacific J. Math.* 47 (2) (1973), 341–355] i Definicję 6 w [F.E. Browder, Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces, *Math. Zeitschrift* 100 (1967), 201–225]) i w literaturze przedmiotu nazywane są firmly nonexpansive mappings. Najistotniejsze wyniki zawarto w twierdzeniach 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5 i 3.3.7, w których to dowodzona jest asymptotyczna regularność wspomnianej już rodziny $\mathcal{S}$ oraz rodzin odwzorowań $\tilde{\mathcal{S}}$ zdefiniowanej jako

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\alpha I + \bar{\alpha}T : T \in \mathcal{S}, \alpha \in \langle 1/2, 1 \rangle\}.$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że zgodnie z informacją z rozdziału I wyniki przedstawione w twierdzeniach 3.3.5 i 3.3.7 są autorstwa Doktoranta a nie Promotora, z którym wspólnie opublikował dwie prace [BoWi] oraz [BoWi2] zawie-

rające częściowe wyniki tego typu.

Najbardziej obszerny, bo liczący bez mała trzydzieści stron, rozdział czwarty poświęcono istnieniu i własnościom idempotentów oraz retrakcji (ciągłych idempotentów) na zbiory wspólnych punktów stałych rodzin odwzorowań $\mathcal{S}$. W pierwszym podrozdziale (podrozdział 4.2) przedstawiono dowód istnienia idempotentu dla przemiennej rodziny odwzorowań afinicznych i τ -ciągłych. Warto przy tym podkreślić, że ciągłość otrzymanego idempotentu wymaga nałożenia dodatkowych założeń na rodzinę $\mathcal{S}$ – porównaj twierdzenie 4.2.10 oraz wyniki otrzymane w publikacji [BoWi]. Niestety, z załączonych informacji wynika, że nie jest to samodzielny wynik Doktoranta. Niemniej jednak w kolejnym podrozdziale Doktorant samodzielnie analizuje możliwość rozszerzenia własności skończonych retrakcji na przypadek nieskończony, oczywiście przy założeniu silnej lub słabej zwartości zbioru. Zaprezentowany sposób postępowania pozwala na dowodzenie twierdzeń dla szerokiego spektrum założeń dotyczących rodziny odwzorowań $\mathcal{S}$ jak na przykład nieoddalania (patrz twierdzenie 4.3.7), regularnego nieoddalania (porównaj twierdzenie 4.3.8) czy afiniczności (porównaj twierdzenie 4.3.6).

W kolejnym podrozdziale pan mgr Borzdyński przeprowadził dowód istnienia nieoddalającej retrakcji na $Fix\mathcal{S}$ w przypadku, gdy dziedziną jest wypukłym, ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha, który ponadto jest zwarty względem pewnych typów topologii (porównaj twierdzenie 4.4.10). Twierdzenie to po raz pierwszy ukazało się w samodzielnej pracy Doktoranta, co pozwala przyjąć, że jest to jego samodzielny wynik. W dalszej części tego samego podrozdziału Doktorant przeanalizował związki z istnieniem centrum Czebyszewa w przypadku topologii $*$ -słabej topologii normy, co prowadzi do innego dowodu twierdzenia 4.4.10 dla zbiorów zwartych względem normy (porównaj twierdzenie 4.4.19). Stwierdzenie, że jest to mocniejszy wynik jest w tym miejsc pewnym nadużyciem, bo zależy czy porównujemy wspomniane twierdzenie z przypadkiem topologii, w której norma jest półciągła z dołu czy też z $*$ -słabą topologią (porównaj twierdzenie 4.4.15). Ostatni podrozdział z obszernego (nie tylko pod względem stronicowym) rozdziału czwartego pokazuje czym można zastąpić założenie o przemienności rodziny $\mathcal{S}$ (porównaj twierdzenie 4.5.5) w przypadku słabej topologii (niefortunnie w rozprawie w tym momencie pojawia się w -zwartość zbioru zamiast po prostu jego słabej zwartości).

Bardzo krótki rozdział piąty to próba częściowej odpowiedzi na pytanie o prawdziwość hipotezy Lau z pracy [A.T.-M. Lau, Y. Zhang, Fixed point properties for

semigroups of nonlinear mappings and amenability, J. Funct. Anal. 263 (2012), 2949–2977] oraz analiza wyników innych autorów dotyczących tego samego problemu.

Przedstawiona powyżej analiza świadczy o dużej dojrzałości naukowej Doktoranta i pozwala z optymizmem patrzeć na jego przyszłość jako matematyka. Niemniej, pan mgr Borzdyński w swojej rozprawie nie ustrzegł się pewnych istotnych mankamentów, które aczkolwiek nie decydują o poprawności prezentowanych wyników. Zostaną one omówione w dalszej części recenzji.

Dowód twierdzenia 3.3.5 dotyczącego uniwersalnie jednostajnej asymptotycznej regularności rodziny odwzorowań generowanych przez ustalony parametr α oraz rodzinę wszystkich odwzorowań afinicznych opiera się na kilku prostych równościach – porównaj strona 43, linijki 21 – 26. Niestety, o ile sama teza twierdzenia jest słuszna, to w dowodzie pojawiają się spore nieścisłości. Mianowicie, równoważność 43^{22} oraz 43^{24} wynika bezpośrednio z założenia o afiniczności odwzorowań z S . Natomiast równość $43^{22}-43^{23}$ wymaga, aby odwzorowanie było addytywne, a kolejna równość $43^{23}-43^{24}$ wymaga jednorodności stopnia pierwszego odwzorowania T . Obu tych własności nie możemy wywnioskować z założeń.

W twierdzeniu 4.3.8 (patrz strona 61 i 62) pojawia się rodzina regularnie nieoddalających odwzorowań zdefiniowanych na zwartym podzbiorze przestrzeni metrycznej. Tymczasem sama definicja tego typu odwzorowań wymaga co najmniej, aby przestrzeń była geodezyjna (porównaj przykładowo pracę Davida Ariza-Ruiz, Laurentiu Leustean, Genaro Lopez-Acedo, Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 366(8) (2014), 4299–4322, która była bodajże pierwszą pracą, w której rozważane były odwzorowania regularnie nieoddalające na przestrzeniach geodezyjnych) – natomiast w przedstawionej w rozprawie doktorskiej definicji 3.2.1 założono, że przestrzeń jest przestrzenią Banacha.

Ponadto w pracy stwierdzono drobne usterki:

6₁₂ brakuje domknięcia nawiasu;

27¹³ zgodnie z lematem 2.3.8 powinno być

$$\mu(T_s^{-1}A) = \mu(A) = 1;$$

- 28₁ skoro o funkcji rozróżniającej punkty zakładamy a priori, że jest nieujemna, to w dowodzie lematu 3.1.2 nierówności powinny mieć tę samą postać jak w twierdzeniu 3.1.5;
- 68₂ zamiast lemat 4.3.7 powinno być twierdzenie 4.3.7;
- 85₉ W bibliografii dla pracy [Da3] brakuje tytułu artykułu: powinno być M. M. Day, Ergodic theorems for Abelian semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 51 (2) (1942), 399–412.

Konkluzja

Pomimo pewnych bardzo drobnych niedociągnięć, rozprawa pana mgra Borzdyńskiego zasługuje na bardzo dobrą ocenę. Autor zajmuje się niebanalnymi problemami i otrzymał bardzo wiele interesujących i zasługujących na uznanie wyników. Stąd też **wnoszę o dopuszczenie mgra Sławomira Borzdyńskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Piętel Bożena