

Poznań, 31 sierpnia 2021

prof. dr hab. Mieczysław Mastyło
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr Joanny Markowicz

„Wybrane własności i zastosowania sum prostych przestrzeni Banacha”

Rozprawa doktorska mgr Joanny Markowicz poświęcona jest badaniu geometrycznych własności sum prostych przestrzeni Banacha i ich zastosowań w geometrii przestrzeni interpolacyjnych generowanych za pomocą metody średnich. W skład rozprawy wchodzi rezultaty zawarte w czterech współautorskich pracach z promotorem prof. Stanisławem Prusem. Dwie prace zostały opublikowane: w *Journal of Nonlinear Convex Analysis* (praca [49]) i *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, sectio A* (praca [50]). Natomiast do druku została przyjęta praca [51] w *Mathematische Nachrichten* oraz praca [52] w *Journal of Topology and Analysis*.

Rozprawa składa się ze wstępu oraz czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera kluczowe definicje z geometrii przestrzeni Banacha, w tym definicje modułu wypukłości i jednostajnej wypukłości oraz modułu gładkości i jednostajnej gładkości, a także pewne znane twierdzenia pokazujące ich zastosowania. W podrozdziale 1.3 dyskutowana jest własność Opiala i jednostajna własność Opiala w przestrzeni Banacha X względem topologii τ na X . Zdefiniowano nowy moduł $s_{X,\tau}$ na $[0, 1]$, który charakteryzuje te własności: $s_{X,\tau}(c) := \inf\{1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|\}$ dla $c \in [0, 1]$, gdzie infimum jest brane po wszystkich ograniczonych ciągach (x_n) w X takich, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq 1$ i $x_n \xrightarrow{\tau} x$, gdzie $\|x\| \geq c$. Przestrzeń X ma słabą (odpow. jednostajną) własność Opiala względem topologii τ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{X,\tau}(c) \geq 0$ dla każdego $c \in [0, 1]$ (odpow. $s_{X,\tau}(c) > 0$ dla każdego $c \in (0, 1]$). Główne wyniki podrozdziału 1.3 są udowodnione przy założeniu, że topologia τ na przestrzeni Banacha X jest dopuszczalna (tzn. τ jest słabsza niż topologia normowa i norma w X jest ciągowo dolnie półciągła względem τ) i zbiór $\mathcal{N}_1(\tau)$ ciągów (x_n) w X zbieżnych do 0 względem topologii τ , dla których $\|x_n\| \geq 1$ dla wszystkich n jest niepusty. Przy tym założeniu o topologii τ mgr Markowicz dowodzi (Twierdzenie 1.3.3), że jeśli X ma słabą własność Opiala względem topologii τ , to $s_{X,\tau}$ jest funkcją ciągłą na $[0, 1]$, natomiast $c \mapsto s_{X,\tau}(c)/c$ jest niemalejącą funkcją na $(0, 1)$. Ponadto udowodniono (Twierdzenie 1.3.4), że jeśli X ma słabą własność Opiala względem τ , to zachodzą równości podające relacje między modułem $s_{X,\tau}$ i modułem $r_{X,\tau}$ (wprowadzonym przez P. K. Lina, K. K. Tana, H. K. Xu w pracy opublikowanej w *Nonlinear Analysis* w 1995 roku).

W rozdziale drugim rozprawy autorka bada kratowe warianty modułów wypukłości i gładkości dla krat Banacha. Jeśli X jest kratą Banacha, to modułem monotoniczności (odpow. porządkowej gładkości) kraty X nazywamy funkcję $\delta_{m,X}: [0, 1]$ (odpow. $\rho_{m,X}$) określoną wzorem $\delta_{m,X}(\varepsilon) =$

$\inf\{1 - \|x - y\|; x, y \in X, 0 \leq y \leq x, \|x\| \leq 1, \|y\| \geq \varepsilon\}$ dla $\varepsilon \in [0, 1]$ (odpow. $\rho_{m,X}(\tau) = \sup\{\|x \vee \tau y\| - 1; x, y \in B(X), x, y \geq 0\}$ dla $\tau \in [0, 1]$). Kratę X nazywamy jednostajnie monotoniczną (odpow. porządkowo jednostajnie gładką), gdy $\delta_{m,X}(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0, 1]$ (odpow. $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\rho_{m,X}(t)}{t} = 0$). W omawianym rozdziale wyliczono moduł monotoniczności $\delta_{m,X}$ dla kraty Banacha $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ z normą $\|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1| + \frac{9}{4}|x_2|, \frac{3}{8}|x_1| + |x_2|\}$ dla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, który pokazuje, że $\delta_{m,X}$ nie jest funkcją wypukłą. Na podstawie tego faktu autorka rozprawy wnioskuje, że nie jest prawdziwy wzór $\delta_{m,X}(\tau) = \sup\{\varepsilon\tau - \rho_{m,X^*}(\varepsilon); 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ z pracy [38] (opublikowanej w *Collectanea Mathematica* 44 (1993), 155–165). Korzystając ze znanej zasady lokalnej refleksywności dla krat Banacha podaje poprawne dowody formuł z pracy [38]: $\delta_{m,X^{**}} = \delta_{m,X}$ i $\rho_{m,X^{**}} = \rho_{m,X}$.

W trzecim rozdziale rozprawy badane są geometryczne własności ogólnych sum prostych $Y := (\sum_{i \in I} X_i)_E$, gdzie $\{X_i\}_{i \in I}$ jest rodziną przestrzeni Banacha, natomiast E jest kratą bazową nad zbiorem indeksów I . Autorka rozprawy dowodzi (Twierdzenie 3.2.1), że jeśli $\delta = \inf_{i \in I} \delta_{X_i}$, to $\delta_Y(\varepsilon) \geq \sup_{\xi + \gamma < \varepsilon} \min\{\delta_E(\xi), \delta_E(\delta(\gamma)(\varepsilon - \xi - \gamma)/2) - \xi/2\}$, gdzie δ_X oznacza moduł jednostajnej wypukłości przestrzeni Banacha X . W podrozdziale 3.3 mgr Markowicz podaje warunki dostateczne na to, aby suma prosta $Y = (\sum_{i \in I} X_i)_E$ posiadała słabą własność Opiala i własność Opiala. Ponadto dowodzi, że jeśli krata bazowa E jest jednostajnie monotoniczna oraz $s(c) := \inf_{i \in I} s_{X_i}(c) > 0$ dla każdego $c \in (0, 1)$, to $s_Y(c) \geq \delta_{m,E}(\frac{c}{2}s(\frac{c}{2})) > 0$ dla każdego $c \in (0, 1)$. W konsekwencji przestrzeń Y ma jednostajną własność Opiala. W podrozdziale 3.4 główny rezultat (Twierdzenie 3.4.2) głosi, że jeśli dla kraty bazowej E nad zbiorem I kąt Riesza $\alpha(E) < 2$ oraz $R = \sup_{i \in I} R(X_i) < 2$, to $R(Y) \leq R(2 - \alpha(E)) + 2(\alpha(E) - 1)$. Tutaj $R(X) := \sup\{\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x + x_n\|\}$ oznacza indeks Garcíi-Falseta przestrzeni Banacha X , gdzie supremum jest brane po wszystkich $x \in B(X)$ oraz wszystkich ciągach (x_n) w $B(X)$ słabo zbieżnych do 0 w X .

Ostatni rozdział rozprawy zawiera rezultaty dotyczące własności geometrycznych przestrzeni interpolacyjnych Lionsa–Peetrego $K_{p,\theta}(\mathbf{X}, E)$ względem pary Banacha $\mathbf{X} = (X_0, X_1)$, generowanej za pomocą kraty Banacha E nad $\mathbb{Z}$ ze znormalizowaną bezwarunkową bazą ze stałą bezwarunkową 1 oraz parametry $p \in (1, \infty)$ i $\theta \in (0, 1)$. Udowodniono (Twierdzenie 4.2.1) przy technicznym warunku na E , że jeśli E jest jednostajnie wypukła i jedna z przestrzeni X_0 lub X_1 jest jednostajnie wypukła, to przestrzeń $K_{p,\theta}(\mathbf{X}, E)$ jest jednostajnie wypukła. Techniczny dowód tego twierdzenia opiera się na opisanym powyżej Twierdzeniu 3.2.1. Należy zwrócić uwagę, że oszacowanie w linii 9 na stronie 70 nie musi być prawdziwe. Po jego usunięciu istotne dla dowodu oszacowanie w linii 10 jest poprawne po zastąpieniu w linii 8 i 10 symbolu x^0 przez $x^0(i)$ oraz w linii 8 symbolu x^1 przez $x^1(i)$. Ponadto w linii 12 zamiast x^0 powinno być $x^0(i)$ oraz w linii 14 we wzorach na ciągi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ pierwszy współczynnik $e^{i\theta}$ powinien być usunięty. W rozdziale czwartym podobają mi się Twierdzenia 4.3.2 i 4.3.3, które dotyczą własności Opiala i jednostajnej własności Opiala. W pierwszym z nich podano warunki dostateczne na to, aby przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\mathbf{X}, E)$ miała własność Opiala. W drugim twierdzeniu podano oszacowanie modułu $s_{K_{p,\theta}}$ przy pomocy modułów s_{X_0} i s_{X_1} oraz modułu monotoniczności kraty bazowej E .

Ocena rozprawy. Rozprawa doktorska mgr Joanny Markowicz została zredagowana merytorycznie poprawnie. Obszerny wstęp zawiera istotne definicje oraz rezultaty z teorii geometrii przestrzeni Banacha. W rozprawie badane są ważne w geometrii przestrzeni Banacha własności: wypukłość, gładkość i ich odpowiedniki, niekwadratowość, własność Opiala i własność Garcíi-Falseta. Wiadomo, że te własności mają ważne zastosowania w teorii punktów stałych odwzorowań

nieoddalających oraz zagadnieniach związanych ze strukturą normalną przestrzeni Banacha. Mgr Joanna Markowicz znakomicie motywuje swoje badania i prezentuje pewne znane wyniki, które pokazują, że świetnie orientuje się w obszarze swojej tematyki badawczej. Umiejętnie prezentuje istotę zagadnień w teorii geometrii przestrzeni Banacha i jest bardzo dobrze zorientowana w literaturze związanej z tematyką badawczą. Autorka rozprawy uzyskane wyniki buduje na bardzo dobrej znajomości wcześniej znanych rezultatów oraz dowodów i dodaje swój istotny wkład. Pewne rezultaty nawiązują do znanych wyników dotyczących np. jednostajnej monotoniczności oraz jednostajnej wypukłości i je wzmacniają. Niektóre dowody są techniczne, co wynika z faktu, że badanie własności geometrycznych w wielu przypadkach wymaga specjalnych technik dowodowych. Prezentacja dowodów uzyskanych rezultatów zawartych w rozprawie jest solidna i w mojej opinii jest na wysokim poziomie. Za wartościowe uważam rezultaty o oszacowaniach modułów charakteryzujących odpowiednie własności geometryczne przestrzeni Banacha. Uzyskane wyniki o geometrycznych własnościach uogólnionych sum prostych przestrzeni Banacha i ich zastosowanie do udowodnienia rezultatów o własnościach Opiala w przestrzeniach interpolacyjnych Lionsa–Peetrego skonstruowanych za pomocą abstrakcyjnej metody rzeczywistej uważam za oryginalne. Reasumując stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr Joanny Markowicz wnosi wartościowy wkład do geometrii przestrzeni Banacha oraz teorii przestrzeni interpolacyjnych.

Konkluzja. Uważam, że rozprawa doktorska mgr Joanny Markowicz spełnia wymagania określone w Ustawie o stopniach i tytule naukowym. Wnoszę wobec tego o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgr Joanny Markowicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M. Martyno