

prof. dr hab. Józef Banaś  
Katedra Analizy Nieliniowej  
Politechnika Rzeszowska

## Recenzja

rozprawy doktorskiej Pani mgr Joanny Markowicz pt. **Wybrane własności  
i zastosowania sum prostych przestrzeni Banacha**

Rozprawa doktorska p. Joanny Markowicz mieści się w tematyce dotyczącej geometrii przestrzeni Banacha. Dokładniej rzecz ujmując dotyczy ona zachowania (przenoszenia) pewnych własności z przestrzeni Banacha na sumy proste tych przestrzeni jak również na utworzone na ich bazie przestrzenie interpolacyjne.

Tych wspomnianych własności przestrzeni Banacha jest w pracy kilka i są to takie fundamentalne własności jak wypukłość i gładkość przestrzeni Banacha (ściśła wypukłość, jednostajna wypukłość, gładkość i jednostajna gładkość) oraz związane z nimi pojęcia takie jak struktura normalna przestrzeni Banacha, jednostajna niekwadratowość a przede wszystkim własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających. Następną, bardzo ważną własnością rozpatrywaną w pracy doktorskiej jest tzw. własność Opiala (słaba własność Opiala, własność Opiala i jednostajna własność Opiala). Przenoszenie tych własności jest dyskutowane w pracy zarówno dla sum prostych jak i dla przestrzeni interpolacyjnych. W rozprawie doktorskiej rozważa się jeszcze zachowanie tzw. współczynnika Garcia-Falseta dla sum prostych przestrzeni Banacha.

Rozprawa doktorska składa się z obszernego Wstępu oraz czterech rozdziałów.

We Wstępie Autorka przedstawiła m.in. dość szeroko rezultaty tej rozprawy w nawiązaniu do wcześniejszych wyników uzyskanych zarówno przez Promotora rozprawy, p. profesora Stanisława Prusa jak i innych autorów.

Definicje pojęć używanych w rozprawie jak i wielu wyników w niej wykorzystywanych są dość drobiazgowo omówione w dwóch pierwszych rozdziałach rozprawy.

Rozdział 1 poświęcony jest głównie omówieniu pojęć wypukłości i gładkości przestrzeni Banacha oraz własności Opiala i współczynnika Garcia-Falseta. Natomiast Rozdział 2 zawiera wiele faktów dotyczących krat Banacha.

Należy zaznaczyć, że w tych dwóch pierwszych rozdziałach recenzowanej pracy doktorskiej można znaleźć również kilka wyników uzyskanych przez Doktorantkę.

Przejdę teraz do omówienia zawartości rozdziałów zawierających autorskie wyniki, które zostały uzyskane przez p. J. Markowicz we współpracy z p. prof. S. Prusem. Są to 3-ci i 4-ty Rozdział recenzowanej rozprawy.

Zacznę od omówienia wyników przedstawionych w sekcji 3.2. Podstawowe twierdzenie z sekcji 3.2, dotyczącej jednostajnej wypukłości sumy prostej przestrzeni Banacha, podaje oszacowanie modułu wypukłości sumy prostej przestrzeni Banacha  $(\sum_{i \in I} X_i)_E$  przy pomocy modułów wypukłości przestrzeni  $X_i$ ,  $i \in I$ . Oszacowanie to wyraża się poprzez oszacowaną od dołu funkcję zdefiniowaną przy pomocy modułów wypukłości przestrzeni Banacha  $X_i$  dla  $i \in I$ .

Z omawianego twierdzenia wynika ważny wniosek mówiący, że jeżeli przestrzeń bazowa jest jednostajnie wypukła, to suma prosta jest również jednostajnie wypukła.

Interesujące są wyniki pracy doktorskiej zawarte w sekcji 3.3 a dotyczące przenoszenia słabej własności Opiala i własności Opiala na sumy proste przestrzeni Banacha. Mianowicie, jeżeli założymy, że przestrzeń bazowa  $E$  nad zbiorem indeksów  $I$  jest rozpięta na podzbiorze generowanym przez wszystkie funkcje charakterystyczne indeksów ze zbioru  $I$ , to słaba własność Opiala z przestrzeni "składowych" przenosi się na sumy proste tych przestrzeni.

W przypadku podobnego przenoszenia własności Opiala należy założyć, że krata  $E$  jest jednostajnie monotoniczna. Natomiast przenoszenie jednostajnej własności Opiala na sumę prostą wymaga nałożenia dodatkowego założenia na przestrzeń bazową  $E$ . M. in. należy o przestrzeni  $E$  założyć, że jest jednostajnie monotoniczna.

W następnej sekcji 3.4 Rozdziału 3-ciego omówiony jest współczynnik Garcia-Falseta  $R(X)$  dla sumy prostej przestrzeni Banacha. Badania prowadzone w tej sekcji związane są z wynikiem uzyskanym właśnie przez Garcia-Falseta, który mówi, że jeżeli  $R(X) < 2$  to przestrzeń Banacha  $X$  ma słabą własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających. Szkoda, że ten wynik jest cytowany we Wstępie, a nie ma o nim wspomniane właśnie w sekcji 3.4.

W nawiązaniu do tego wyniku Autorka dowodzi twierdzenia mówiącego, że dla przestrzeni bazowej  $E$  takiej, że  $E = E_0$ , zachodzi nierówność  $R(E) \leq \lambda(E)$ , gdzie  $\lambda(E)$  oznacza tzw. kąt Riesz kraty  $E$ .

Następnie, po tym twierdzeniu zamieszczono twierdzenie pozwalające oszacować współczynnik Garcia-Falseta dla sumy prostej przestrzeni Banacha przy pewnych dodatkowych założeniach.

W sekcji 4.1 omawia się parę interpolacyjną dowolnej przestrzeni Banacha i przestrzeni Banacha

z bazą bezwarunkową. Dla takiej pary interpolacyjnej dowodzi się pewnej nierówności, która jest wykorzystywana w dalszych rozważaniach.

Podstawowym rezultatem sekcji 4.2 dotyczącej jednostajnej wypukłości w przestrzeniach interpolacyjnych jest twierdzenie mówiące, że jeżeli przynajmniej jedna przestrzeń Banacha w parze interpolacyjnej  $X = (X_0, X_1)$  jest jednostajnie wypukła oraz  $E$  jest jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową spełniającą pewne dodatkowe warunki, to przestrzeń interpolacyjna  $K_{p,\theta}(X, E)$  jest też jednostajnie wypukła.

Ostatnia sekcja Rozdziału 4-ego, sekcja 4.3, zawiera wyniki związane ze słabą własnością Opiala, własnością Opiala i jednostajną własnością Opiala. Wyniki te mówią, np., że jeżeli  $X = (X_0, X_1)$  jest parą interpolacyjną taką, że przestrzenie  $X_0$  oraz  $X_1$  są refleksywne a ponadto  $E$  jest przestrzenią jednostajnie monotoniczną i obie przestrzenie  $X_0, X_1$  mają słabą własność Opiala oraz przynajmniej jedna z tych przestrzeni ma własność Opiala, to przestrzeń interpolacyjna  $K_{p,\theta}(X, E)$  ma własność Opiala.

Podobny wynik otrzymuje się jeżeli założymy, że przynajmniej jedna z przestrzeni  $X_0, X_1$  ma jednostajną własność Opiala.

Podsumowując należy stwierdzić, że praca doktorska p. Joanny Markowicz jest napisana starannie i precyzyjnie. Tematyka pracy, mieszcząca się w geometrii przestrzeni Banacha, jest z pewnością trudna. Wyniki zawarte w pracy należy uznać za nietrywialne oraz wysoce nietrywialne.

W pracy używa się bardzo wielu pojęć dotyczących sum prostych przestrzeni Banacha i przestrzeni interpolacyjnych. Są to pojęcia dość trudne i wymagają posługiwania się wieloma pojęciami analizy funkcjonalnej. Niewiątliwie recenzowana praca doktorska jest tymi pojęciami nieco przeładowana. Doktorantka niejako rekompensuje te "niedogodności" ilustrując swoje rozważania dobrze dobranymi przykładami.

Nie mam najmniejszych wątpliwości, że rozprawa doktorska Pani mgr Joanny Markowicz spełnia ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Z pełnym przekonaniem rekomenduję przedłożoną rozprawę do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Rzeszów, 2 września 2021r.

