

Mirosław Lachowicz, prof. dr hab.
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa

Zbąszyń, 15 lipca 2021

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Rozprawa doktorska „**Coalescence processes in continuum with applications**”, napisana w języku angielskim przez pana mgr **Krzysztofa Piłorza**, pod kierunkiem profesora **Jurija Kozickiego**, składa się ze wstępu i pięciu rozdziałów — razem 78 stron, bibliografia zawiera 37 pozycji.

Praca dotyczy dynamiki dużych (nieskończonych) układów elementów. Owe elementy nazywa się cząsteczkami, co sugeruje kontekst fizyczny. Należy jednak pamiętać, że opis jest bardziej ogólny i może się odnosić do różnych obiektów. Cząsteczki poruszają się stochastycznie, doznając skoków z odpychaniem, uwzględnia się możliwość ich zlepiania. Pojawiające się modele są typowymi modelami w *skali mikroskopowej* (individual-based models). Można tego typu modele odnieść do opisu ciekawych zjawisk koagulacji ze skokowym mechanizmem przemieszczania się.

Rozprawa doktorska składa się ze wstępu (Section 1, 2) oraz czterech części (Section 3 — Section 6). Rozdział 1 (Section 1) jest właściwym wstępem opisującym, w sposób wzorowy, zawartość rozprawy. Użycie słowa „wzorowy” nie jest przypadkowe. Rzadko można spotkać się z tak dokładnie i solidnie podanym celem pracy i opisem jej najważniejszych osiągnięć. Rozdział 2 to wstęp matematyczny wprowadzający w zaawansowany język matematyczny wykorzystywany w dalszej części rozprawy. Część ta bazuje na formalizmie opracowanym przez grupę matematyków z uczestnictwem promotora rozprawy — prof. Kozickiego. W rozdziale 2 przedstawione są podstawowe definicje, udowodnionych zostało 10 lematów i jedno stwierdzenie oraz przedstawiony został 1 przykład. Wyniki te mają charakter bazowy w dalszej części rozprawy.

Rozdziały 3 i 4 dotyczą modelu mikroskopowego oddziałujących cząstek podlegających skokowemu ruchowi stochastycznemu typu odpychającego z uwzględnieniem skokowych zmian polegających na zlepianiu się cząsteczek. Wyniki te bazują na pracy napisanej przez Autora rozprawy wraz z promotorem i opublikowanej w *Discrete Continuous Dynam. Systems*. Model, który jest rozpatrywany, wywodzi się z prac promotora, a dodatkowym, bardzo ciekawym, efektem jest uwzględnienie zlepiania się cząsteczek. W rozdziale 3 dowodzi się jednego lematu i jednego twierdzenia (twierdzenie 3.2) oraz formułuje się twierdzenie 3.3, którego dowód znajduje się w rozdziale 4. Twierdzenie 3.2 dotyczy lokalnego w czasie istnienia i jednoznaczności klasycznych rozwiązań na poziomie funkcji korelacji. Stosuje się tutaj modyfikacje metody Owsiannikowa. Pewną ograniczonością tych metod jest lokalny w czasie charakter wyników. Zapewne niczego innego nie należałoby oczekiwać, ale warto podać jakiś komentarz. Jest to efekt uwzględnionego procesu sklejania się, gdyż bez tego procesu problemy te się nie pojawiają. Na to warto zwrócić, w dalszych badaniach, istotną uwagę, gdyż wiadomo, że w klasycznych układach koagulacji typu Smoluchowskiego, możliwe są efekty, które naturalnie wiąże się z procesem żelacji — zatem jest to bardzo ciekawe matematycznie i interpretacyjnie. Jednakże sytuacja rozpatrywana w rozprawie (układy nieskończone) jest różna od tej w teorii Smoluchowskiego.

Matematycznie bardzo zaawansowanym wynikiem jest twierdzenie 3.3 mówiące o odniesieniu wyniku z twierdzenia 3.2 do stanu układu. Dokładniej do pytania, czy rozwiązanie jest funkcją korelacji jednoznacznie określonej miary pod-poissonowskiej, lokalnie w czasie (zgodnie z charakterem twierdzenia 3.2). Dowód twierdzenia 3.3, zawarty w rozdziale 4, jest bardzo trudny, zaawansowany, wymagający dużej sprawności matematycznej. Przeprowadzony jest w 4 krokach, z których ostatni krok rozpada się na 6 „podkroków”. Nie sposób w krótkiej opinii opisać pomysłów matematycznych zawartych w tej części. Należy jednak podkreślić, że pokazują one na dużą kulturę matematyczną autora. Jest to nowoczesna matematyka i jest to niewątpliwie nowy, oryginalny wkład do metod matematycznych w danej dziedzinie.

Bardzo ciekawy jest rozdział 5, w którym bada się przejście od układu mikroskopowego oddziałujących cząsteczek do opisu „statystycznego” jednej testowej cząsteczki, w języku gęstości odpowiednich miar — opisu mezoskopowego wywodzącego się od L. Boltzmann (1872). Typowo związane jest to ze „stochastyczną chaotycznością” układu. W rezultacie otrzymuje się skomplikowane, nieliniowe równanie kinetyczne (5.5) dla „skalowania typu

Vlasova” na poziomie mezoskopowym. Głównym wynikiem jest twierdzenie 5.4: dowodzi się lokalnego istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla równania kinetycznego. Wynik ten został opublikowany w pracy z promotorem i I. Omelyanem z 2021 roku — wcześniej (w roku 2019) ukazała się praca Autora rozpatrująca szczególny przypadek. Dowód poprzedzony jest dwoma technicznymi lematami ze żmudnymi oszacowaniami. Ponadto w rozdziale uogólnia się powyższą strukturę i otrzymuje równanie kinetyczne (5.14) dla skokowego stochastycznego ruchu ze zlepianiem. Głównym wynikiem jest twierdzenie 5.9 o lokalnym istnieniu i jednoznaczności. Niestety jest to ta część pracy, w której czytelnikowi brakuje komentarzy autora (pomimo perfekcyjnego określenia zawartości we wstępie). W nadmiarze wzorów gubi się łatwo podstawa tych działań, a w szczególności ewentualny sens fizyczny. Postać równania kinetycznego (5.14) jest bardzo skomplikowana: nie spotkałem się wcześniej z równaniem tego typu. Uważam więc, że dokładna interpretacja tej struktury byłaby cenna. W części tej pojawiają się bardzo techniczne lematy 5 — 8. Ogrom wkładu matematycznego jest godny podziwu.

Ostatnia część rozprawy — rozdział 6 — opisuje algorytm dla równania kinetycznego z poprzedniego rozdziału w specjalnej uproszczonej sytuacji. Wyniki zostały umieszczone w pracach z 2021 roku, których współautorem (poza promotorem) był I. Omelyan. Stosuje się tu metodę Rungego–Kutty. Numeryczne symulacje pokazują bardzo ciekawe efekty — powstawanie i propagację niejednorodności przestrzennych oraz możliwość nietrywialnych stanów stacjonarnych. Warto podkreślić, że podobne bogactwo zachowań było obserwowane dla zdecydowanie prostszych układów na poziomie mezoskopowym — M. Lachowicz, D. Wrzosek, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 11, 2001 oraz mikroskopowym — M. Lachowicz, T. Ryabukha, *Math. Biosci. Engineering* 10, 2013.

Otrzymane w rozprawie wyniki numeryczne mogą być wskazaniem do dalszych zaawansowanych badań matematycznych. Bogactwo możliwych zachowań rozwiązań czyni tę teorię bardzo atrakcyjną. Jednocześnie, moim zdaniem, ich struktura, pozwala mieć nadzieję, że równania tego typu, przy ich odpowiedniej interpretacji, mogą być podstawą do modelowania istotnych zjawisk przyrodniczo–społecznych. Dodatkowo część numeryczna wskazuje na istotę badania przejść mikro – mezo. Otrzymane schematy numeryczne dotyczą poziomu mezoskopowego, a zatem mają niezależne znaczenie matematyczne. Są to bardzo ważne zagadnienia znajdujące się w centrum uwagi najlepszych specjalistów w danej dziedzinie.

Warto zwrócić uwagę, że rozprawa bazuje na opublikowanych pracach:

- 2 pracach samego autora: [30] w *Ann. Univ. MC-S Sect. A* (2016) oraz [31] w *Math. Appl. (Warsaw)* (2019);
- 1 pracy wraz z promotorem: [23] w *Discrete Continuous Dyn. Systems* (2020);
- 2 pracach z promotorem i I. Omelyanem: [29] w *Numer. Algorithms* oraz [22] w *Appl. Math. Comput.*, obie z roku 2021.

Dodam, że miałem okazję spotkać pana mgr Krzysztofa Pilorza na różnych konferencjach i zapoznać się ze zaawansowanymi szczegółami matematycznymi jego badań.

W rozprawie nie zauważyłem błędów lub luk matematycznych.

Konkluzja:

Uważam, że **rozprawa ta spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim: stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej.** Stawiam wniosek o dopuszczenie mgr Krzysztofa Pilorza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Bez żadnych wątpliwości **wniosuję o uznanie rozprawy za wyróżniającą.** Motywuję to bogactwem matematycznym pracy, jej różnorodnością oraz licznymi trudnościami technicznym, które Autor musiał przezwyciężyć, a które opisałem powyżej.

Michał Łachowicz