

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Weroniki Pauliny Woś
pt. „Zastosowanie pewnych miar niezwartości w egzystencjalnej
teorii nieskończonych układów równań całkowych”**

Rozprawa doktorska Pani Weroniki Pauliny Woś dotyczy metody dowodzenia istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych wykorzystującej miary niezwartości równań całkowych i bez wątpienia stanowi istotny przyczynek w rozwoju teorii równań całkowych. Postaram się to uzasadnić poniżej w możliwie treściwy sposób.

Po pierwsze, teoria nieskończonych układów równań całkowych jest teorią bardzo młodą, o czym świadczy rodząca się dopiero literatura (wpisują się w nią dwie prace współautorskie doktorantki, stanowiące bazę merytoryczną dla recenzowanej pracy doktorskiej). W tym kontekście warto przypomnieć, że zdecydowanie łagodniejsza teoria nieskończonych układów równań liniowych narodziła się dopiero w latach 20-tych i 30-tych minionego wieku za sprawą prac G. Polya (polski akcent z tamtych lat znany jest dzisiaj jako metoda Kaczmarza, która wykorzystywana jest m.in. w obliczeniach numerycznych w tomografii komputerowej).

Po drugie, zastosowania nieskończonych układów równań całkowych stymulowane są dopiero od niedawna zagadnieniami fizyki, zwłaszcza w kontekście nieskończonych równań różniczkowych (przykładowo równania Schwingera-Dysona, a nawet metoda Hartree-Focka dla macierzy nieskończonych).

Wreszcie po trzecie, a może i najważniejsze zastosowana w rozprawie metoda dowodzenia fundamentalnych twierdzeń oparta na teorii miar niezwartości jest nadzwyczaj elegancka od strony technicznej.

Ponadto do zdecydowanych zalet recenzowanej pracy doktorskiej należą:

- dobór ilustrujących teorię przykładów,
- zwięzłość prowadzonych rozważań,
- udany sposób serwowania rozważanego materiału, mający cenny walor dydaktyczny.

Teraz przejdę do omówienia kolejnych rozdziałów recenzowanej rozprawy doktorskiej, pomijając wstęp stanowiący opisowe wprowadzenie w tematykę rozprawy. Rozdział o numerze jeden, preliminaria, przedstawia standardowe pojęcia i fakty wykorzystywane w pracy w tym fundamentalne twierdzenia typu Darbo o punkcie stałym. Nadmienię, że występuje tu kilka literówek, w tym w dowodzie twierdzenia 1.5 (wielkość $d'(f(y), d(z))$ powinna być zastąpiona przez $d'(f(y), f(z))$).

Rozdział o numerze dwa pracy prezentuje podstawowe pojęcia i fakty teorii miar niezwartości. Poza drobnymi niedociągnięciami stylistycznymi występują tu jeszcze dwa potknięcia merytoryczne:

- w dowodzie lematu 2.1.4 popełniono łatwy do usunięcia błąd. Otóż nie jest prawdą, że każdy zbiór A o średnicy równej d zawiera się w kuli o środku w dowolnym punkcie zbioru A i promieniu równym d , np. wystarczy rozważyć dwuelementowy zbiór $A = \{a, b\}$ oraz kulę $K = K(a, \text{dist}\{a, b\})$;
- z kolei w dowodzie lematu 2.2.3 mamy błąd związany z szacowaniem maksimum. I tak, ponieważ rozważana tu miara niezwartości jest regularna, więc jest też pełna,

czyli $\mu(F) = 0$ dla każdego skończonego $F \subset E$. Zatem z subliniowości miary μ dostajemy:

$$\begin{aligned} \max \{ \mu(B(a_k, r)) : k = 1, \dots, n \} &= \mu(B(a_{k_0}, r)) = \mu(\{a_{k_0}\} + B(\theta, r)) \leq \\ &\leq \mu(\{a_{k_0}\}) + \mu(B(\theta, r)) = \mu(B(\theta, r)) = \\ &= \mu(rB(\theta, 1)) = r\mu(B(\theta, 1)). \end{aligned}$$

Tego rodzaju rozważania (bardziej zawile) można znaleźć już w pracy Pani Profesor Wiesławy Kaczor z 1988 roku pod tytułem *Measures of Noncompactness and an Existence Theorem for Differential Equations in Banach Spaces* w *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska* tom 42, numer 5, zob. dowód Theorem 2. Ponadto, ważne jest odnotowanie na końcu rozdziału o numerze dwa rozprawy wyniku chińskich matematyków z 2019 roku, że w dowolnej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha X istnieje regularna miara niezwartości, która nie jest równoważna mierze Hausdorffa χ . Podkreślę jeszcze, że historia tego twierdzenia rozpoczęła się w 1992 roku, kiedy to Profesor J. Banaś oraz A. Martínón w pracy z *Mathematica Slovaca* podali pierwszy przykład nierównoważnych miar niezwartości.

W rozdziale o numerze trzy omówione są miary niezwartości w przestrzeni $C([0, T], E)$ oraz pewna klasa miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Podane konstrukcje oraz dowody są przejrzyste i stanowią dobre wprowadzenie techniczne do rozwijającej się tematyki rozprawy. Drobne redakcyjne potknięcia nie mają większego wpływu na ostateczny pozytywny odbiór tego rozdziału (dla przykładu na stronie 20-tej w definicji przekroju $X(t)$ brakuje założenia: *oraz dla dowolnego $t \in [a, b]$* , na stronie 21-wszej nieco drażni nierozróżnianie terminologii pojęcie i oznaczenie przy okazji definicji $\bar{\mu}(X)$, $X \subset E$, w dowodzie lematu 3.3.1 funkcja $\omega^T(X, \delta)$ jest niemalejąca, a nieco później należy zastąpić: *...zatem ...Zatem ...* odpowiednio przez: *...oraz ..., więc ...*, na końcu strony 35 ostatnie zdanie powinno brzmieć: *Żadna z tych miar niezwartości nie jest pełna*).

W rozdziale numer cztery zdefiniowane są miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ generowane przez dowolną miarę niezwartości w danej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha E . Ściślej opisane są trzy takie miary niezwartości μ_a, μ_b, μ_c generowane przez daną miarę niezwartości μ , natomiast w twierdzeniu 4.1.4 udowodnione są pewne nierówności pomiędzy tymi miarami. Tuż po dowodzie twierdzenia 4.1.4 opisane są jądra miar μ_a, μ_b, μ_c . Przedstawione w tym rozdziale wyniki są ciekawe, a ich dowody są poprawne. Podkreślamy, co zresztą jest charakterystyczne dla całej pracy, że to elegancja wyodrębnionych pojęć sprawia, że prowadzone rozważania, dowody wydają się nie być trudne, przebiegają bez większych problemów. W kontekście podrozdziału 4.1 niepozytywnie odnotowałbym jedynie sformułowanie w przykładzie 4.1.2, *że jej wykres jest trójkątem równoramiennym z podstawą równą przedziałowi ...* – tak pisać jest niewskazane! Tytułem uzasadnienia, onegdaj, pewien pracownik naukowy zapytał mnie, czy te pionowe odcinki prostokątów ilustrujących pewną funkcję też należą do wykresu tej funkcji?! Ważny dla dalszych rozważań jest natomiast podrozdział 4.2, gdzie wprowadzono użyteczne postacie miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ będące odpowiednikami wspomnianych wyżej miar μ_a, μ_b, μ_c dla trzech różnych miar niezwartości określonych na rodzinie $\mathfrak{M}_{l_\infty}$.

Rozdział numer pięć stanowi zwieńczenie recenzowanej pracy, której celem jest uzasadnienie istnienia rozwiązań nieskończonego układu nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina przy odpowiednich założeniach na funkcje tworzące równania tego układu najpierw względem miary niezwartości μ_c^3 , a następnie względem

miary niezwartości μ_a^1 . Potencjalnie negatywne odczucia budzić może ilość wyszczególnionych założeń (odpowiednio jedenaście i dziesięć), ale odczucie to nicomal natychmiast mija, gdy stwierdzamy, że wielostronicowe dowody dwóch fundamentalnych twierdzeń dzięki tym założeniom poddają się niemal bez walki, są jedynie techniczne. Podkreślę, że pod koniec każdego z dowodów na stronach odpowiednio 69 i 86 widzimy sens i urok założeń, odpowiednio (xi) i (x), które wyraźnie różnią się od pozostałych założeń. Każde z dwóch fundamentalnych twierdzeń uzupełnione jest przykładem zastosowania. Podobnie jak w przypadku dowodów wspomnianych twierdzeń weryfikacja założeń w tych przykładach przebiega gładko i szybko. Jestem pełen uznania dla osiągniętego efektu. Wylapałem tu jedynie odrobinę niedopatrzeń, przykładowo kolizję oznaczeń w nienumerowanym wzorze na stronie 65, supremum ma być wzięte po $i \geq p$ w liniach 5 i 6 od góry na stronie 67, brak stwierdzenia, że korzystamy z twierdzenia Lagrange'a na stronie 72, w uwadze 5.2.1 chodzi o miarę μ_a^1 , kolizję oznaczeń w warunku (v) na stronie 75, również kilka literówek, które zaznaczyłem w manuskrypcie. Wszystkie te drobne niedopatrzienia nie mają wpływu na moją bardzo dobrą ocenę merytoryczną zarówno tego ostatniego rozdziału jak i całej, bardzo obszernej rozprawy doktorskiej Pani Weroniki Pauliny Woś.

Biorąc pod uwagę całokształt zaprezentowanych przeze mnie uwag stwierdzam, że recenzowana rozprawa doktorska Weroniki Pauliny Woś spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Weroniki Pauliny Woś do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Data:

Gliwice 16.09.2021

Podpisane przez:

Roman Wituła