Załącznik nr 1
do Uchwały Nr XXV-9.45/21
Senatu UMCS

Zagadnienia obowiązujące na egzamin licencjacki dla studentów kierunku MATEMATYKA

Przebieg egzaminu:

1. Egzamin dyplomowy składa się z części pisemnej i ustnej.
2. Część pisemna egzaminu obejmuje zagadnienia z przedmiotów obowiązkowych (wykaz przedmiotów poniżej). Przeprowadzana jest ona w formie testu wielokrotnego wyboru. Test trwa 75 minut i składa się z 30 zadań, do których podane są po 3 odpowiedzi. Przy każdej z odpowiedzi należy zaznaczyć, czy jest ona prawdziwa, czy nie. Za każde poprawne zaznaczenie student otrzymuje 0,01 punktu, za niepoprawne lub brak zaznaczenia – 0 punktów. Za poprawne zaznaczenie trzech odpowiedzi do jednego zadania student otrzymuje dodatkowo 1 punkt. Warunkiem zaliczenia części pisemnej jest uzyskanie co najmniej 15 punktów. W przypadku niezaliczenia części pisemnej egzaminu student po 7 dniach przystępuje do poprawy części pisemnej.
3. Podczas ustnej części egzaminu dyplomowego studenci powinni wykazać się znajomością:
   - zagadnień związanych bezpośrednio z tematyką przedstawianej pracy seminaryjnej,
   - zagadnień z przedmiotów obowiązkowych (wykaz zagadnień poniżej),
   - zagadnień z fakultetów zaliczonych przez danego studenta.
4. W trakcie ustnej części egzaminu członkowie Komisji zadają od trzech do pięciu pytań z wykazu zagadnień egzaminacyjnych obowiązujących dla danego kierunku oraz spoza wykazu dotyczące tematyki pracy seminaryjnej oraz z fakultetów zaliczonych przez danego studenta.

Wykaz przedmiotów obowiązkowych

- Logika i teoria mnogości
- Analiza matematyczna I
- Algebra liniowa I
- Geometria analityczna I
- Analiza matematyczna II
- Podstawy algebry ogólnej
- Algebra liniowa II
- Geometria analityczna II
- Analiza matematyczna III
- Topologia przestrzeni metrycznych
- Podstawy teorii miary
- Podstawy analizy zespolonej
- Równania różniczkowe zwyczajne
- Podstawy rachunku prawdopodobieństwa
- Podstawy geometrii różniczkowej
- Podstawy analizy funkcjonalnej
- Podstawy statystyki matematycznej

PRZYKŁADOWE ZADANIA TESTOWE NA CZĘŚĆ PISEMNĄ EGZAMINU

Zadanie 1. Czy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe, jeżeli:

$u = 3, 1, -3$

(a) , $\vec{v} = (1,0,1)$,
(b) $\vec{u} = (4, 3, 1)$, $\vec{v} = (-2, 2, 2)$,
(c) $\vec{u} = (1,-1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Zadanie 2. Granica $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ wynosi:
(a) 0,
(b) 2e,
(c) e^2.

Zadanie 3. Dana jest liczba zespolona $z = 1 - i\sqrt{3}$. Czy następujące stwierdzenia są prawdziwe:
(a) Arg z = π,
(b) $|z| = 3$,
(c) $z^3 = 8$.

Wykaz zagadnień z przedmiotów obowiązkowych na egzaminie dyplomowym

1. Formuły logiki zdań: funktory wykorzystywane w ich budowie, wartościowania, rodzaje formuł.
2. Formuły logiki predykatów (kwantyfikatorów): rola i znaczenie kwantyfikatorów, tautologie logiki predykatów.
3. Operacje teoriomnogościowe, aksjomatyzacja teorii mnogości.
4. Definicja relacji, relacje równoważności i klasy abstrakcji, relacje porządku i ich elementy wyróżnione.
5. Definicja funkcji, różne typy funkcji (injekcja, surjekcja, bijekcja).
6. Funkcje parzyste, nieparzyste i monotoniczne.
7. Obrazy i przeciwobrazy zbiorów.
8. Równoliczność, moc zbioru, liczby kardynalne.
9. Dobry porządek, liczby porządkowe, operacje na liczbach porządkowych.
10. Liczby zespolone.
11. Algebra macierzy.
12. Wyznacznik macierzy. Metoda Sarrusa. Rozwinięcie Laplace'a. Twierdzenie Cauchy'ego.
13. Metody wyznaczania macierzy odwrotnej.
14. Przestrzeń liniowa. Liniowa niezależność wektorów. Baza.
15. Przekształcenia liniowe.
16. Macierz przekształcenia liniowego. Macierz zmiany bazy.
17. Rząd macierzy.
18. Układy równań liniowych. Wzory Cramera. Twierdzenie Kroneckera-Capellego.
19. Układ jednorodny. Fundamentalny układ rozwiązań.
20. Wektory i wartości własne. Wielomian charakterystyczny.
21. Diagonalizacja. Twierdzenie Jordana.
22. Rzeczywiste i zespolone przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie.
23. Odwzorowania liniowe. Obraz i jądro odwzorowania liniowego.
24. Funkcjonały liniowe. Odwzorowania dwuliniowe i kwadratowe.
25. Macierze odwzorowań liniowych. Macierz i baza przestrzeni. Wartości i wektory własne.
26. Twierdzenia Gerszgorina.
27. Przestrzenie unitarne. Bazy ortogonalne, ortogonalizacja Grama-Schmidta.

28. Grupy, homomorfizmy grup, podstawowe twierdzenie o homomorfizmie grup, twierdzenie Lagrange'a, podgrupy normalne i grupy ilorazowe.
29. Podstawowe typy grup: grupy abelowe, grupy cykliczne.
30. Sumy proste grup, struktura skończonych grup abelowych.
31. Grupy przekształceń, twierdzenie Cayleya.
32. Pierścienie i ciała, ich homomorfizmy, ideały, ideały pierwsze i maksymalne. Pierścienie ilorazowe: podstawowe własności i przykłady, związki z teorią liczb.
33. Teoria podzielności w pierścieniach całkowitych: elementy pierwsze, elementy nierozkładalne, pierścienie Gaussa, pierścienie euklidesowe.
34. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność elementów pierścienia, algorytm Euklidesa i jego zastosowanie do rozwiązywania równań diofantycznych.
35. Pierścień wielomianów. Kryteria nierozkładalności wielomianów.
36. Elementarne nierówności.
37. Zasada indukcji matematycznej.
38. Kresy zbiorów.
39. Ciągi liczbowe, własności, granice, punkty skupienia.
40. Szeregi liczbowe, rodzaje zbieżności i kryteria zbieżności.
41. Iloczyn Cauchy'ego szeregów.
42. Granica funkcji.
43. Ciągłość funkcji rzeczywistych jednej zmiennej.
44. Pochodna funkcji.
45. Pochodne wyższych rzędów.
46. Ekstrema lokalne funkcji.
47. Reguła de l'Hospitala.
48. Całka nieoznaczona.
49. Całka oznaczona Riemanna, Riemanna-Stieltjesa.
50. Całki niewłaściwe.
51. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych
52. Pochodna kierunkowa, pochodne cząstkowe.
53. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych.
54. Pochodne cząstkowe i różniczki wyższych rzędów, wzór Taylora.
55. Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych.
56. Funkcje dane w sposób uwikłany.

57. Ekstrema warunkowe.
58. Całki krzywoliniowe pierwszego i drugiego rodzaju.
59. Całka podwójna, jej własności i zastosowania.
60. Twierdzenie Greena.
61. Całki powierzchniowe pierwszego i drugiego rodzaju.
62. Całka potrójna: definicja, własności, zastosowania.
63. Twierdzenie Stokesa, twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego.
64. Rzut stereograficzny.
65. Pochodna funkcji zespolonej. Równania Cauchy-Riemanna.
66. Własności homografii.
67. Zespolone szeregi potęgowe.
68. Definicja i własności funkcji wykładniczej
69. Iloczyn skalarny. Własności iloczynu skalarnego.
70. Iloczyn wektorowy. Własności iloczynu wektorowego.
71. Afiniczny układ współrzędnych. Zmiana afinicznego układu współrzędnych i transformacja współrzędnych przy zmianie układu.
72. Równania prostych na płaszczyźnie i w przestrzeni.
73. Równania płaszczyzn.
74. Przekształcenia afiniczne. Własności przekształceń afinicznych.
75. Izometrie. Rozkład izometrii na symetrie osiowe.
76. Pojęcie niezmiennika geometrycznego. Niezmienniki grupy przekształceń afinicznych.
77. Stożkowe uogólnione. Klasyfikacja stożkowych uogólnionych.
78. Dwuwymiarowa przestrzeń rzutowa. Własności prostych rzutowych.
79. Przekształcenia rzutowe. Niezmienniki przekształceń rzutowych.
80. Zasada dualizmu dwuwymiarowej przestrzeni rzutowej. Przykłady twierdzeń dualnych.
81. Korelacje biegunowe. Twierdzenie o stycznych do elipsy w przestrzeni rzutowej.
82. Euklidesowy model dwuwymiarowej przestrzeni rzutowej. Własności stożkowych w euklidesowym modelu dwuwymiarowej przestrzeni rzutowej.
83. Powierzchnie drugiego stopnia w przestrzeni trójwymiarowej. Równanie parametryczne powierzchni obrotowej.
84. Przestrzenie metryczne. Przykłady.
85. Przekształcenia nieoddalające. Przekształcenia Lipschitza.
86. Ciągłe i jednostajnie ciągłe przekształcenia przestrzeni metrycznych.

87. Zbieżność i granica ciągu w przestrzeniach metrycznych.
88. Zbieżność jednostajna ciągu przekształceń.
89. Zbiory otwarte. Wnętrze zbioru. Zbiór brzegowy.
90. Punkty graniczne zbioru. Zbiory domknięte.
91. Charakteryzacje ciągłych przekształceń przestrzeni metrycznych.
92. Spójność przestrzeni metrycznych.
93. Własności i przekształcenia przestrzeni zwartych. Twierdzenie Cantora.
94. Przestrzenie metryczne zupełne i ośrodkowe.
95. Przestrzenie przekształceń. Jednakowa ciągłość. Kryterium Ascoliego.
96. Twierdzenie Baire'a. Metoda kategorii.
97. Punkt stały przekształcenia. Twierdzenie Banacha o przekształceniu zbliżającym.
98. Sigma-ciała zbiorów, zbiory borelowskie.
99. Pojęcie miary i własności miar.
100. Miara Lebesgue’a i jej własności.
101. Funkcje mierzalne.
102. Definicja całki Lebesgue’a i własności całki.
103. Lemat Fatou. Twierdzenia Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.
104. Sigma- ciało produktowe, produkty miar i twierdzenie Fubiniego.
105. Twierdzenie Peano. Niejednoznaczność rozwiązań.
106. Przedłużanie rozwiązań, rozwiązania wysycone, charakteryzacja rozwiązań wysyconych.
107. Twierdzenie Picarda-Lindel\"{o}fa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego. Metoda iteracji Picarda.
108. Lemat Gronwalla (nierówność Gronwalla) wraz z przykładem zastosowania.
109. Metody rozwiązywania podstawowych typów równań różniczkowych np. równań o zmiennych rozdzielonych, jednorodnych, liniowych, Bernoulliego, Riccatiego, zupełnych (czynnik całkujący), liniowych wyższych rzędów o stałych współczynnikach.
110. Układy równań różniczkowych liniowych: wrońskian (wyznacznik Wrońskiego), układ fundamentalny rozwiązań, metoda z obliczaniem eksponenty macierzy.
111. Prawdopodobieństwo jako miara.
112. Prawdopodobieństwo warunkowe i wzór Bayesa.
113. Zmienne losowe, zmienne losowe wielowymiarowe i ich rozkłady.
114. Zmienne losowe typu dyskretnego i absolutnie ciągłego.
115. Niezależność zmiennych losowych.

116. Momenty zwykłe i centralne.
117. Rodzaje zbieżności zmiennych losowych.
118. Prawa wielkich liczb.
119. Centralne twierdzenie graniczne.
120. Krzywe sparametryzowane oraz geometryczne na płaszczyźnie i w przestrzeni.
121. Długość łuku krzywej i parametryzacja naturalna za pomocą długości łuku.
122. Reparametryzacja krzywej.
123. Krzywizna i krzywizna ze znakiem krzywej płaskiej.
124. Reper Freneta i wzory Freneta krzywej.
125. Podstawowe twierdzenie lokalnej teorii krzywych.
126. Powierzchnie regularne i sparametryzowane.
127. Pierwsza forma kwadratowa powierzchni.
128. Druga forma kwadratowa powierzchni.
129. Krzywizna Gaussa powierzchni.
130. Przestrzenie unormowane, topologia wyznaczona przez normę.
131. Przestrzenie Banacha, przestrzenie Hilberta. Normy równoważne.
132. Podstawowe przykłady przestrzeni ciągów i przestrzeni funkcyjnych.
133. Nierówność Höldera i Minkowskiego.
134. Ciągłość operatorów i funkcjonałów liniowych, norma operatora.
135. Pojęcie przestrzeni statystycznej.
136. Podstawowe miary statystyki opisowej.
137. Estymatory - pojęcie estymatora, nieobciążoność, zgodność, błąd średniokwadratowy.
138. Momenty próbkowe i ich własności.
139. Metody wyznaczania estymatorów.
140. Nierówność Rao-Cramera i efektywność estymatorów.
141. Pojęcie statystyki dostatecznej i minimalnej statystyki dostatecznej. Kryterium faktoryzacji.
142. Pojęcie przedziału ufności.
143. Test statystyczny. Funkcja mocy testu. Błąd I-go i II-go rodzaju.