

Krystyna Maciąg

*Charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa przez regresje niekolejnych uogólnionych
statystyk porządkowych oraz dyskretnych wartości rekordowych*

STRESZCZENIE

W rozprawie rozważany jest problem wyznaczania rozkładów prawdopodobieństwa na podstawie znajomości tylko pojedynczej funkcji regresji w różnych modelach uporządkowanych danych statystycznych. W pracy zaprezentowane zostało nowatorskie podejście do problemu charakteryzacyjnego bazujące na własności Markowa rozważanych modeli. W przypadku rozkładów ciągłych problem tego typu jest rozpatrywany dla modelu uogólnionych statystyk porządkowych, który obejmuje, jako szczególne przypadki, wiele modeli uporządkowanych zmiennych losowych m.in. statystyk porządkowych, wartości rekordowych, k -tych wartości rekordowych, sekwencyjnych statystyk porządkowych oraz statystyk porządkowych progresywnie cenzorowanych typu II. Funkcja regresji jest w tym przypadku określona wzorem

$$E\left(h(X_*^{(r+\ell)}) \mid X_*^{(r)} = x\right) = \xi(x),$$

gdzie h jest znaną funkcją ściśle rosnącą a $X_*^{(r)}, X_*^{(r+\ell)}$ oznaczają odpowiednio r -tą oraz $(r + \ell)$ -tą uogólnioną statystykę porządkową z pewnego ciągłego rozkładu określonego przez dystrybuantę F . Natomiast w przypadku dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa badany jest analogiczny problem charakteryzacyjny z wykorzystaniem tylko funkcji regresji dyskretnej wartości rekordowych.

W rozdziale 1 przypomniano podstawowe definicje i potrzebne w rozprawie własności rozpatrywanych modeli uporządkowanych zmiennych losowych. Omówiono dokładnie problem charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa na podstawie znajomości tylko pojedynczej funkcji regresji tych modeli oraz przedstawiono zarys nowego podejścia do problemu charakteryzacyjnego opartego na własności Markowa rozważanych modeli. Korzystając z tej własności pokazano specyficzną strukturę rekurencyjną regresji. W szczególności własność ta pozwala zastąpić regresję niekolejnych uogólnionych statystyk porządkowych przez odpowiednio zmodyfikowaną regresję kolejnych zmiennych w tym modelu. W rozdziale tym wyprowadzono również istotne własności regresji modeli uporządkowanych zmiennych losowych.

W rozdziale 2 rozważano charakteryzacje rozkładów absolutnie ciągłych o ciągłych funkcjach gęstości przez pojedyncze regresje niekolejnych uogólnionych statystyk porządkowych. Korzystając z własności Markowa wykazano, że jednoznaczność charakteryzacji bazowego rozkładu prawdopodobieństwa przez regresję uogólnionych statystyk porządkowych jest równoważna z jednoznacznością rozwiązania odpowiedniego układu $\ell - 1$ równań różniczkowych

spełniającego pewne warunki ograniczające. W szczególności, dla $\ell = 2$ regresja ξ uogólnionych statystyk porządkowych z parametrami γ_{r+1} i γ_{r+2} determinuje F jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie różniczkowe

$$y' = \frac{\gamma_{r+2} y - h(x)}{\gamma_{r+1} \xi(x) - y} \xi'(x)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie φ takie, że $h(x) < \varphi(x) < \xi(x)$ dla $x \in (\alpha, \beta)$ oraz $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\xi'(t) dt}{\xi(t) - \varphi(t)} = \infty$. Co więcej, wówczas dystrybuanta F jest jednoznacznie wyznaczona wzorem

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\gamma_{r+1}} \int_{\alpha}^x \frac{\xi'(t)}{\xi(t) - \varphi(t)} dt\right).$$

Wynik ten jest nowy nawet dla zwykłych statystyk porządkowych. Zaprezentowane podejście zostało zastosowane do otrzymania nowych charakterystyki rozkładów absolutnie ciągłych, a także do wyprowadzenia nowego dowodu jednoznaczności charakterystyki rozkładu potęgowego, wykładniczego i Pareto przez odpowiednie regresje liniowe. Podano charakterystykę dla pewnego rozkładu befa oraz wykazano, że rozkład normalny, Gompertza oraz Weibulla z parametrem kształtu $\delta > 1$ są jednoznacznie charakteryzowane przez odpowiadające im regresje uogólnionych statystyk porządkowych o odstępnie dwa, $\ell = 2$.

W kolejnym rozdziale rozprawy wyniki zostały uogólnione na klasę wszystkich rozkładów ciągłych, niekoniecznie mających funkcję gęstości. W tym ogólnym przypadku wykazano, że jednoznaczność charakterystyki bazowego rozkładu zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedni problem całkowy (równania całkowe lub układy równań całkowych) ma jednoznaczne rozwiązanie. Korzystając z uzyskanych wyników otrzymano nowe charakterystyki rozkładów ciągłych. W szczególności wykazano, że rozkład gamma, Gumbela i logistyczny są jednoznacznie charakteryzowane przez odpowiadające im regresje uogólnionych statystyk porządkowych o odstępnie dwa.

Przedmiotem rozważań w rozdziale 4 jest analogiczny problem charakterystyczny dla dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa z wykorzystaniem regresji niekolejnych słabych wartości rekordowych następującej postaci

$$E(h(W_{r+\ell}) | W_r = x) = \xi(x),$$

gdzie $W_r, W_{r+\ell}$ oznaczają odpowiednio r -tą oraz $(r + \ell)$ -tą słabą wartość rekordową z pewnego dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa. Dla $\ell \geq 2$ pokazano, że jednoznaczność charakterystyki bazowego rozkładu prawdopodobieństwa w tym przypadku jest równoznaczna z jednoznacznością rozwiązania odpowiadającego równania różnicowego ($\ell = 2$) lub układu równań różnicowych ($\ell > 2$) z pewnymi niestandardowymi warunkami ograniczającymi. To nowe kryterium jednoznaczności zastosowano do otrzymania znanych jak i nowych charakterystyki dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa. Wykazano m.in., że rozkład Poissona i ujemny dwumianowy są jednoznacznie charakteryzowane przez odpowiadające im regresje słabych wartości rekordowych o odstępnie dwa.

Wyniki rozprawy doktorskiej zostały opublikowane w następujących artykułach:

- M. Bieniek, K. Maciąg, *Uniqueness of characterization of absolutely continuous distributions by regressions of generalized order statistics*, *AStA Advances in Statistical Analysis*, 102(3):359–380, 2018.
- M. Bieniek, K. Maciąg, *On the unique characterization of continuous distributions by single regression of non-adjacent generalized order statistics*, *Journal of Integral Equations and Applications*, 30(4):491–519, 2018.
- M. Bieniek, K. Maciąg, *On the problem of the unique characterization of discrete distributions by single regression of weak records*, *Statistics*, 52(3):533–551, 2018.

20.05.2019

Krzysztof Maciąg