Lublin, 30.03.2021 r.

Uniwersytet Marii Curie - Skłodowskiej w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Agnieszka Tanaś

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Fragmentation processes in continuum with applications

Procesy fragmentacji w przestrzeniach ciągłych z zastosowaniami

W ostatnich latach przeprowadzono wiele badań dotyczących dużych układów jednostek oddziałujących między sobą i ze środowiskiem. Takie modele pojawiają się w naukach przyrodniczych, biologii, fizyce, ekologii, oceanologii, a także w ekonomii, naukach społecznych itp. Badaniom tych modeli poświęcono wiele prac naukowych. Jednakże, problemem, który pozostaje wciąż aktualny, jest matematyczny opis modeli, który uwzględniałby strukturę jednostek badanego układu i ich ewolucję w czasie.

Celem niniejszej pracy jest przyczynienie się do rozwoju teorii dynamiki nieskończonych układów cząstek ulegających fragmentacji. Takie systemy rozważane są w lokalnie zwartej przestrzeni polskiej X (przestrzeń cech, *trait space*), gdzie każda cząstka jest całkowicie scharakteryzowana przez swoje położenie $x \in X$. Wówczas dynamika takiej populacji polega na zmianie cech jej członków, w tym na podleganiu najprostszym procesom opartym na dwóch ewolucyjnych aktach: zanikaniu (śmierci) jednostki i prokreacji (dołączeniu do populacji). Czystymi stanami układu są lokalnie skończone konfiguracje (podzbiory X), a dynamikę takiego systemu opisuje się jako ewolucję obserwabli w równaniu Kołmogorowa. Ogólnymi stanami systemu są natomiast miary probabilistyczne w odpowiedniej przestrzeni konfiguracyjnej, których ewolucję uzyskuje się rozwiązując odpowiadające tym miarom równanie Fokkera-Plancka.

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest wprowadzeniu i badaniu dwóch modeli nieskończonych układów cząstek. W pierwszym modelu rozważana jest nieskończona populacja jednostek w przestrzeni $X = \mathbb{R}^d$. Cząstka z cechą $x \in \mathbb{R}^d$ ulega niezależnemu podziałowi, w trakcie którego wytwarza dwie nowe cząstki o cechach $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ i zanika w tym samym czasie. Podlega ona również procesowi śmierci zależnemu od pozostałych jednostek układu w wyniku tłoczenia się, czyli lokalnej konkurencji. W ten sposób cząsteczki oddziałują ze sobą. Głównym wynikiem tej części rozprawy jest konstrukcja globalnej w czasie ewolucji stanów w określonej klasie miar probabilistycznych. Odbywa się to poprzez wprowadzenie miar pod-poissonowskich, a następnie zastosowanie tzw. miar i funkcji korelacyjnych. Pierwszym krokiem do uzyskania wspomnianej ewolucji jest rozważenie wersji modelu dla skończonego układu cząstek, w którym stosuję dopasowaną do naszych celów technikę perturbacji Thieme-Voigta. Następnie równanie ewolucyjne dla funkcji korelacyjnych jest formułowane w odpowiadającej im przestrzeni Banacha typu L^∞. W związku z tym, nie ma możliwości zastosowania standardowych metod półgrupowych. W celu uzyskania klasycznego rozwiązania wspomnianego równania, konstruuję półgrupę C_0 (*sun-dual*) w odpowiedniej przestrzeni Banacha, którą wykorzystuję do zbudowania rodziny ograniczonych operatorów liniowych działających z mniejszych do większych przestrzeni. Wykazuję również, że oddziaływania takie jak lokalna konkurencja mogą prowadzić do globalnej regulacji. Oznacza to, że ewolucja miar zostaje uzyskana poprzez identyfikację rozwiązania równania ewolucyjnego dla funkcji korelacyjnych z jedyną miarą. Udowadniam również, że ewolucja miar zachowuje pod-poissonowskość stanów, a tym samym powoduje samoregulację systemu. Ponadto, aby pokazać zależność między powyższym podejściem do procesu podziału i śmierci z jego fenomenologicznym opisem, czyli opisem mezo- i makroskopowym, przeskalowałam interakcję między jednostkami i uzyskałam równanie kinetyczne odpowiadające badanemu modelowi.

Drugi model przedstawiony w rozprawie poświęcony jest nieskończonemu układowi cząstek, w którym każda cząstka wytwarza w sposób losowy skończoną „chmurę" rozproszonych nowych cząstek w lokalnie zwartej przestrzeni polskiej X i znika w tym samym czasie. System takich cząstek jest zlokalizowanych w X w taki sposób, że każdy zwarty podzbiór X zawiera tylko skończenie wiele elementów chmury, a wielokrotne lokalizacje cząstek są możliwe. Mechanizm tego rodzaju procesu fragmentacji (*branching process*) określony jest przez jądro fragmentacji (prawdopodobieństwa), które opisuje rozmieszczenie potomstwa (składającego się na wspomnianą chmurę) cząstki znajdującej się w $x \in X$. Proces ten można zinterpretować jako nielokalne losowe rozproszenie, w którym nie występuje interakcja między cząstkami. Podobnie jak w pierwszym modelu, również tutaj używam miar probabilistycznych jako stanów systemu. Jednak w rozważaniach dotyczących tego modelu udowadniam istnienie i jednoznaczność rozwiązania odpowiedniego równania Fokkera-Plancka bezpośrednio, tj. bez wprowadzania funkcji korelacyjnych. W rozpatrywanym modelu, w celu pracy z nieskończonymi konfiguracjami, ograniczam nośnik miar poprzez nałożenie dodatkowych warunków na jądro fragmentacji. Pozwala to na przejście do zmodyfikowanych (*tempered*) konfiguracji i rozwiązanie nieliniowego równania ewolucyjnego w przestrzeni ograniczonych funkcji ciągłych zdefiniowanych przez jądro. Dodatkowo, definiuję operator Kołmogorowa jako domknięty operator liniowy w odpowiedniej przestrzeni funkcji ciągłych i stąd uzyskuję jednoznaczne klasyczne rozwiązanie równania Kołmogorowa poprzez konstrukcję półgrupy C_0 generowanej przez ten operator.

Wyniki zawarte w rozprawie oparte są na poniższych artykułach naukowych.

[1] Y. Kozitsky and A. Tanaś, *Evolution of states of an infinite fission-death system*, arXiv:1804.01556, to appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications (accepted) (2018).

[2] Y. Kozitsky and A. Tanaś, *Self-regulation in infinite populations with fission-death dynamics*, Phys. Lett. A **382** (2018), no. 35, 2455–2458.

[3] Y. Kozitsky and A. Tanaś, *Evolution of states of an infinite particle system with nonlocal branching*, submitted to Journal of Evolution Equations (2021).

[4] A. Tanaś, *A continuum individual based model of fragmentation: dynamics of correlation functions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **64** (2015), no. 2, 73-83.

Agnieszka Tanaś