

Uniwersytet im. Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
mgr Agnieszka Monika Gdula

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sum zmiennych losowych i pól losowych

Praca doktorska z dziedziny:
Rachunek Prawdopodobieństwa,

napisana pod kierunkiem dr hab. Andrzeja Krajki

Streszczenie

Mocne prawo wielkich liczb (MPWL) jest jednym z najbardziej fundamentalnych i szeroko stosowanych twierdzeń teorii prawdopodobieństwa. MPWL znajduje zastosowania między innymi w obliczaniu całek metodami Monte Carlo (Stanisław Ulam użył tej metody do obliczeń związanych z bombą atomową), wyliczaniu dystrybucyj empirycznej, dowodzeniu twierdzeń dotyczących teorii liczb, konstruowaniu estymatorów w statystyce, badaniu procesów ergodycznych w fizyce lub ekonomii takich, jak na przykład model Isinga. MPWL doczekało się szeregu uogólnień. Między innymi rozważano wielowymiarowe sumy pól zmiennych losowych ([11], [12]), sumy dowolnie zależnych zmiennych losowych, ale o jednakowym rozkładzie ([13]), czy sumy losowo indeksowane ([9]). Badano również szybkości zbieżności w MPWL (twierdzenia typu Bauma-Katza, [14]).

Niech V będzie pewnym obszarem w $\mathbb{N}^d$ takim, że elementy przekątnej $\underbrace{(n, n, \dots, n)}_{d\text{-razy}}$ należą do V . MPWL dla podciągów polega na badaniu granicy

$$\lim_{\substack{|\underline{n}| \rightarrow \infty \\ \underline{n} \in V}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|},$$

gdzie $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\underline{n}| = \prod_{j=1}^d n_j$, $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz $S_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k} \leq \underline{n}} X_{\underline{k}}$. W przypadku dowodzenia MPWL dla podciągów takich sum pojawił się problem techniczny (szczegółowo opisany w rozdziale 9.4 str. 246-247 [11]). Techniki dowodzenia polegają na przedstawieniu każdego $X_{\underline{n}}$ jako kombinacji liniowej $S_{\underline{k}}, \underline{k} \leq \underline{n}$, wywnioskowaniu o prawie pewnej zbieżności $X_{\underline{n}}/|\underline{n}|$ i zastosowaniu Lematu Borela-Cantelliego. Jednak w tej liniowej kombinacji, w przypadku nieregularnego brzegu V może nam zabraknąć dość dużo sum $S_{\underline{k}}, \underline{k} \leq \underline{n}, \underline{k} \notin V$. W pierwszym rozdziale pracy podajemy nowe (nie występujące w literaturze) częściowe rozwiązanie tego problemu, poprzez wygładzenie z góry i z dołu brzegu V i szacowanie różnic w MPWL pomiędzy tymi poziomami.

Losowo indeksowane sumy, czy też sumy dla nielosowych podciągów były rozważane w literaturze, jednakże nie rozważano dotychczas MPWL dla sum losowo wybranych składników. Niech $\{A_n, n \geq 1\}$ będzie ciągiem dowolnie zależnych, prawie pewnie skończonych, zbiorów losowych w $\mathbb{N}$. Niech $\{X_n, n \geq 1\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych niezależnych od $\{A_n, n \geq 1\}$. MPWL dla sum losowo wybranych składników polega na badaniu granic $\{\frac{S(A_n)}{b_n}, \frac{V(A_n)}{b_n}, \frac{Z(A_n)}{b_n}, n \geq 1\}$ gdzie

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_{i \in A} X_i - E \sum_{i \in A} X_i, \\ V(A) &= \sum_{i \in A} X_i - \sum_{i \in A} EX_i, \\ Z(A) &= \sum_{i \in A} EX_i - E \sum_{i \in A} X_i. \end{aligned}$$

Wyniki tego typu uzyskujemy w rozdziale drugim pracy, wykorzystując techniki oparte o nierówność Hájeka-Rényiego a opisane w [3].

W trzecim rozdziale pracy dowodzimy MPWL dla pola losowego $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ zmiennych losowych dowolnie zależnych, ale o tym samym rozkładzie. Również tutaj sumowanie przebiega po polu zbiorów losowych $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, teraz jednak będących mierzalnymi odwzorowaniami przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ w $(\mathbb{N}^d, 2^{\mathbb{N}^d})$, podobnie jak w poprzednim rozdziale, prawie pewnie skończonymi. Otrzymane wyniki uogólniają wyniki Rosalsky'ego i Stoici [13], którzy rozważali ten problem dla ciągów zmiennych losowych i nielosowych sum.

Jednym z rodzajów MPWL jest Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne (PPCTG), tutaj sumujemy odpowiednio znormowane indykatory zależnych zdarzeń. Szczegółową historią PPCTG można znaleźć, na przykład, w monografii [10], podczas gdy główne techniki dowodów są rozwinięte w [1] i [2]. W rozdziale czwartym, podobnie jak w poprzednim, rozważamy sumy po zbiorach podzbiorów $\mathbb{N}^d, d \geq 1$, czyli badamy sumy $D_{\underline{n}}^{-1} \sum_{\underline{k} \leq \underline{n}} d_{\underline{k}} I[\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}} < x]$ dla pewnych pól liczb $\{d_{\underline{n}}, b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, $D_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k} \leq \underline{n}} d_{\underline{k}}$.

Ostatni rozdział pracy poświęcony jest szybkości zbieżności w MPWL, a więc Twierdzeniu typu Bauma-Katza dla losowego (nierozważane dotąd w literaturze) d -wymiarowego procesu średnich ruchomych. Wynik ten uogólnia główne Twierdzenie Sunga [14], który rozważał nielosowy proces średniej ruchomej w jednowymiarowej przestrzeni.

Wyniki pierwszego rozdziału są opublikowane w [5], drugiego rozdziału są przyjęte do druku w [8], trzeciego rozdziału znajdują się w recenzji w czasopiśmie *Periodica Mathematica Hungarica* [7] i częściowo zostały przyjęte do druku w [8], wyniki czwartego rozdziału zostały przyjęte do druku w [6] natomiast wyniki piątego rozdziału ukazały się w [4].

Literatura

- [1] I. Berkes. Results and problems related to the pointwise central limit theorem. In *Asymptotic Methods in Probability and Statistics*, pages 59–96. Elsevier, 1998.
- [2] I. Berkes and E. Csáki. A universal result in almost sure central limit theory. *Stochastic Processes and Their Applications*, 94(1):105–134, 2001.
- [3] I. Fazekas and O. Klesov. A general approach to the strong law of large numbers. *Theory of Probability & Its Applications*, 45(3):436–449, 2001.
- [4] A. M. Gdula and A. Krajka. On the complete convergence of randomly weighted sums of random fields. *Demonstratio Mathematica*, Vol. 47, nr 1:232–252, 2014.
- [5] A. M. Gdula and A. Krajka. Strong law of large numbers for random variables with multidimensional indices. *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 37, Fasc. 1:185–199, 2017.
- [6] A. M. Gdula and A. Krajka. Almost sure central limit theorems for sums of a randomly chosen multiindex field. (in print in *Publicationes Mathematicae Debrecen*), 2021.
- [7] A. M. Gdula and A. Krajka. The strong law of large numbers for sums of randomly chosen identically distributed random variables. (submitted to *Periodica Mathematica Hungarica*), 2021.
- [8] A. M. Gdula and A. Krajka. The strong law of large numbers for sums of randomly chosen random variables. (in print in *Lithuanian Mathematical Journal*), 2021.
- [9] A. Gut. *Stopped random walks*. Springer, 2009.
- [10] F. Jonsson. Almost sure central limit theory. <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:304483/FULLTEXT01.pdf>, 2007.
- [11] O. Klesov. *Limit theorems for multi-indexed sums of random variables*, volume 71. Springer, 2014.
- [12] C. Noszály and T. Tómacs. A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables. In *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math*, volume 43, pages 61–78, 2000.
- [13] A. Rosalsky and G. Stoica. On the strong law of large numbers for identically distributed random variables irrespective of their joint distributions. *Statistics & Probability Letters*, 80(17-18):1265–1270, 2010.
- [14] S. H. Sung. Complete convergence for weighted sums of random variables. *Statistics & probability letters*, 77(3):303–311, 2007.

Agnieszka Gdula
21.04.2021