dr hab. inż. Bożena Piątek, prof. Pol. Śl.
Katedra Matematyki
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska w Gliwicach
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Gliwice, 13.01.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Sławomira Borzdyńskiego

Pan mgr Sławomir Borzdyński przedstawił rozprawę doktorską pod tytułem

Twierdzenia o punktach stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych względem słabych topologii

Praca składa się z pięciu rozdziałów. Dwa pierwsze mają charakter wstępny i dotyczą omówienia przedstawionych wyników (Rozdział I) oraz podstawowych własności półgrup odwzorowań związanych z przemiennością (Rozdział II). Kolejne dwa rozdziały zawierają główne wyniki mgra Borzdyńskiego. Ostatni, piąty rozdział został poświęcony omówieniu przedstawionych we wcześniejszych rozdziałach wyników w świetle częściowej weryfikacji prawdziwości hipotezy Lau postawionej w pracy [A. Lau i Y. Zhang, Fixed point properties for semigroups of nonlinear mappings and amenability, Journal of Functional Analysis 263 (2012) 2949–2977] (por. także [A. Lau i W. Takahashi, Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups, Topological Methods in Nonlinear Analysis 5 (1995) 39–57]) i dotyczącej równoważności lewostronnej średniowalności półgrupy i istnienia punktów stałych dla każdej reprezentacji tej półgrupy.

W dalszej części zostaną omówione najistotniejsze wyniki rozdziałów trzeciego i czwartego. W trzecim rozdziale Autor skupia się na rodzinie odwzorowań nieoddalających określonych na ograniczonym (i ewentualnie wypukłym) podzbiorze przestrzeni Banacha. W szczególności Autor dowodzi, że rodzina S wszystkich regularnie nieoddalających odwzorowań jest uniwersalnie jednostajnie regularnie nieoddalająca, czyli

$$\lim_n \sup_{T\in S} \sup_{x\in C} \|T^n x - T^{n+1}x\| = 0.$$

Idea dowodu zaczerpnięta została z pracy [K. Goebel i W. Kirk, Iteration processes for nonexpansive mappings, in: Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis, 1983]. Stąd też można wywnioskować, kiedy rodziny odwzorowań określonych na ograniczonych i wypukłych podzbiorach przestrzeni Banacha mają wspólny punkt stały (patrz twierdzenie 3.4.8).

Najdłuższy, bo liczący trzydzieści stron, jest rozdział czwarty poświęcony istnieniu idempotentów i retrakcji (ciągłych idempotentów) na zbiór wspólnych punktów stałych dla rodzin i półgrup odwzorowań. W podrozdziale 4.2 Autor rozważa rodziny i generowane przez nie półgrupy odwzorowań aficznicznych. W szczególności w twierdzeniu 4.2.10 i podobnie we wniosku 4.2.11 dowodzi, że jeżeli C jest zwartym (odpowiednio słabo-zwartym) i wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej (odpowiednio przestrzeni Banacha), to dla dowolnej rodziny S odwzorowań afinicznych z C w C istnieje idempotent $R\colon C \to Fix\ S$. Warto w tym miejscu podkreślić, że druga część twierdzenia dotycząca istnienia retraktu oparta jest na fałszywym lemacie 4.2.7. Mianowicie w dowolnej przestrzeni topologiczno-liniowej równociągła rodzina odwzorowań (nawet afinicznych) niekoniecznie generuje równociągłą podgrupę tychże odwzorowań (porównaj lemat 4.2.7 oraz wniosek 4.5 w pracy [S. Borzdyński i A. Wiśnicki, Applications of uniform asymptotic regularity to fixed point theorems, Journal of the Fixed Point Theory and Applications, 18 (2016) 855–866]). Ponadto we wniosku 4.2.11 Autor rozważając rodzinę S opiera się na lematach dowiedzionych wcześniej dla szczególnego przypadku rodzin zamkniętych na składanie, czyli de facto będących półgrupami. Zauważmy jednak, że zarówno teza twierdzenia jak i wniosku pozostają słuszne, jeżeli założyć a priori, że rodzina S ma strukturę półgrupy (jak na przykład w pracy [V. Phong, Nonlinear almost periodic actions of semingroups, in: Functional Analysis, 1994]).

Podrozdział 4.3 poświęcony jest rozszerzaniu własności skończonych retrakcji na przypadek nieskończony, oczywiście przy założeniu silnej bądź słabej zwartości zbioru. Zaprezentowany sposób postępowania pozwala na dowodzenie twierdzeń dla wielu różnych założeń dotyczących rodziny przekształceń S jak na przykład nieoddalania (patrz twierdzenie 4.3.8) czy regularnego nieoddalania (patrz twierdzenie 4.3.9) czy afiniczności (patrz twierdzenie 4.3.7).

Podrozdział 4.4 dotyczy istnienia nieoddalającego retraktu $R\colon C \to Fix\ S$, gdzie C jest ograniczonym wypukłym i zwartym (w pewnej słabej topologii τ) podzbiorem przestrzeni Banacha, w której norma jest τ-półciągła z dołu, a S jest komutującą rodziną τ-ciągłych nieoddalających odwzorowań na C (patrz twierdzenie 4.4.10). Wynik ten pochodzi z samodzielnej pracy mgra Borzdyńskiego, co pozwala przypuszczać, że jest jego autorstwa. Rozumowanie oparte jest na nietrywialnym dowodzie, że taki retrakt istnieje dla dowolnej skończonej rodziny odwzorowań. Dalsze rozumowanie jest już takie samo jak w podrozdziale 4.3. Wcześniej twierdzenie tego typu dla *-słabej topologii w przestrzeni dualnej pojawiło się w pracy [S. Borzdyński i A. Wiśnicki, A common fixed point theorem for a commuting family of weak* continuous nonexpansive mappings, Studia Mathematica 225 (2014) 173–181].

Krótki podrozdział 4.5 poświęcono możliwym uogólnieniom twierdzeń z poprzednich podrozdziałów, w szczególności osłabieniu założenia o przemienności półgrupy S (patrz na przykład twierdzenie 4.5.5).

Recenzent z przykrością odnotował, że oceniana rozprawa zawiera kilkanaście omyłek, nie tylko drukarskich, których listę zamieszczono poniżej.

8_{11} zamiast $e \in Ef$ powinno być $e \in E$;

30_7 zamiast $\binom{n}{k}$ powinno być $\binom{n-1}{k}$;

34_7 zbiór funkcji działających z S w C^* nie jest przestrzenią liniową, przestrzenią taką jest zbiór funkcji z S w E^*, natomiast C^* jest wypukłym podzbiorem E^*, zatem omawiany zbiór funkcji jest wypukły;

36^7 zamiast lemat 3.2.2 powinno być twierdzenie 3.2.2;

44^9 zamiast $R\colon C \to \bar{S}$ powinno być $R\colon C \to Fix\bar{S}$, tutaj $\bar{S} \subset C^C$ i R nie może być idempotentem;

58^{16} zamiast $Tx = \tau - \lim_\alpha x$ powinno być $Tx = \tau - \lim_\alpha T_\alpha x$;

59_5 nierówność $\|T_{x,\lambda}y - T_{x,\lambda}z\| \leq \bar{\lambda}\|y - z\|$ daje już wspomnianą kontrakcję, natomiast nierówność $\|T_{x,\lambda}y - T_{x,\lambda}z\| < \|y - z\|$ daje tylko odwzorowanie kontrakcyjne;

60_7 fraza *wykorzystując τ–ciągłość T i τ–dolną półciągłość* powinna być uzupełniona o wyraz *normy*;

61^1 z równości $TR_{n+1}x = R_{n+1}x$ nie możemy wnioskować, że $T_{\lambda_m,x}x = x$, powinno być (tak jak w dowodzie twierdzenia 2.15 pracy [S. Borzdyński, Common fixed point theorems for nonexpansive mappings using the lower semicontinuity property, Colloquium Mathematicum 154 (2018) 157–165])

$$x \in Fix\, T_{n+1}R_n \Rightarrow T_{\lambda_m,x}x = x;$$

ponadto stronę wcześniej to samo odwzorowanie było oznaczone przez T_{x,λ_m};

61_3 zamiast z twierdzenia 4.4.9 powinno być z lematu 4.4.9;

62_{14} zbiorem punktów stałych odwzorowania jest oczywiście $\{(1,0,0,\ldots),(0,0,0,\ldots)\}$ a nie $\{\pm 1,0,0,\ldots\}$;

65^2 we wzorze na β powinno być $\beta = \dfrac{t+\bar{\lambda}t-\lambda}{t+\lambda\bar{t}}$;

65_8 powinno być jak w twierdzeniu 4.3.9 bądź ewentualnie jak przy twierdzeniu 4.3.9.

76^2 w nocie bibliografii brakuje tytułu pracy;

77^{13} w nocie bibliografii brakuje roku wydania.

W całej pracy na krytykę zasługuje interpunkcja – całkowicie nieodpowiadająca zasadom języka polskiego, autor wielokrotnie nie poprzedza przecinkiem wyrazów *który, która, w których*..., natomiast często poprzedza przecinkiem spójnik *oraz*.

Na zakończenie jeszcze jedna uwaga krytyczna: w dużej mierze omawiana rozprawa zawiera wyniki, które zostały opublikowane w trzech artykułach, których Pan Borzdyński jest współautorem bądź autorem (ostatnia praca) i które zostały opublikowane w cenionych czasopismach międzynarodowych: Studia Mathematica, Journal of Foxed Point Theory and Applications oraz Colloquium Mathematicum. Z racji, że współautorem dwóch spośród nadmienionych prac jest promotor tej rozprawy, recenzentowi brakuje istotnej informacji dotyczących wkładu własnego doktoranta.

Konkluzja

Pomimo licznych niedociągnięć głównie językowych, pracę mgr Borzdyńskiego oceniam wysoko, Autor zajmuje się niebanalnymi problemami i otrzymał bardzo dużą liczbę interesujących wyników. Stąd też **wnoszę o dopuszczenie mgra Sławomira Borzdyńskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.

Piątek Bożena