Załącznik nr 4
do Uchwały Nr XXV-5.10/21
Senatu UMCS

Zagadnienia obowiązujące na egzamin magisterski dla studentów kierunku studiów Matematyka

Teoria miary i całki

1. σ-ciało. Pojęcie miary. σ-ciało zbiorów borelowskich.
2. Miara zewnętrzna. Miara Lebesgue'a. Zbiory mierzalne i niemierzalne względem miary Lebesgue'a. Zbiory miary zero.
3. Funkcje mierzalne i ich własności.
4. Całka Lebesgue'a i jej własności.
5. Całka Lebesgue'a a całka Riemanna.
6. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i o zbieżności monotonicznej. Lemat Fatou.

Analiza funkcjonalna

7. Przestrzeń unormowana. Przestrzeń Banacha, przestrzeń sprzężona.
8. Funkcjonały liniowe. Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału liniowego.
9. Ciągłość operatora. Norma operatora. Przestrzeń unormowana operatorów (ciągłych) liniowych i ograniczonych.
10. Przestrzeń Hilberta i jej własności. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Bazy ortogonalne.
11. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o odwzorowaniu odwrotnym i o wykresie domkniętym.
12. Twierdzenie Hahna-Banacha i jego konsekwencje.
13. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających.

Analiza zespolona

14. Funkcje holomorficzne i meromorficzne i ich własności. Szeregi potęgowe i szeregi Laurenta.
15. Ciągi i szeregi funkcji holomorficznych, zbieżność niemal jednostajna, twierdzenie Weierstassa.
16. Punkty osobliwe izolowane. Residuum funkcji.
17. Twierdzenie i wzór całkowy Cauchy'ego.
18. Twierdzenie o residuach i jego zastosowania.
19. Zasada maksimum dla funkcji holomorficznych.
20. Iloczyny nieskończone.

Równania różniczkowe

21. Pojęcie równania różniczkowego, rodzaje równań różniczkowych, rozwiązania równania różniczkowego, zagadnienie początkowe, interpretacja geometryczna, równania elementarnie całkowalne. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego.
22. Układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu. Przestrzeń liniowa rozwiązań układu jednorodnego, układ fundamentalny, macierz fundamentalna, twierdzenie Liouville'a.
23. Metody rozwiązywania układów równań różniczkowych liniowych.
24. Stabilność rozwiązań równania różniczkowego w sensie Lapunowa, kryteria stabilności.
25. Zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu.
26. Równania różniczkowe cząstkowe. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych, podstawowe zagadnienia graniczne, początkowe, mieszane, pojęcie zagadnienia dobrze postawionego. Klasyczne równania fizyki.

Topologia

27. Topologia. Przestrzeń topologiczna. Topologia indukowana i topologia produktowa. Baza topologii.
28. Aksjomaty oddzielania dla przestrzeni topologicznych.
29. Przestrzenie topologiczne a przestrzenie metryczne. Metryzowalność przestrzeni topologicznych.
30. Ciągłość w przestrzeniach topologicznych a ciągłość w przestrzeniach metrycznych.
31. Zwartość, ośrodkowość, spójność przestrzeni topologicznych. Własności funkcji ciągłych w tych przestrzeniach.
32. Topologie w przestrzeniach odwzorowań.
33. Homotopia przekształceń, homotopijna równoważność, grupa podstawowa.
34. Klasyfikacja topologiczna rozmaitości wymiaru l i 2.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

35. Estymacja punktowa i przedziałowa. Własności estymatorów i metody ich otrzymywania. Statystyki dostateczne.
36. Regresja. Metoda najmniejszych kwadratów.
37. Wnioskowanie statystyczne.
38. Prawdopodobieństwo jako miara.
39. Funkcje charakterystyczne, funkcje tworzące momenty i tworzące prawdopodobieństwo.
40. Różne rodzaje zbieżności w teorii prawdopodobieństwa. Twierdzenia graniczne i ich zastosowanie w statystyce (centralne twierdzenie graniczne, prawa wielkich liczb).

Egzamin magisterski składa się z czterech pytań: 2 pytań zadawanych przez komisję z powyższej listy pytań oraz 2 pytań dotyczących pracy magisterskiej i obejmujących treści zaliczonych przedmiotów specjalizacyjnych.

Przygotowując się do egzaminu student powinien zwrócić uwagę na:

1. zapoznanie się z podstawowymi definicjami i przykładami je ilustrującymi,
2. najważniejsze twierdzenia dotyczące omawianych pojęć,
3. zapoznanie się z kontrprzykładami ilustrującymi niezbędność założeń,
4. zastosowana najważniejszych twierdzeń,
5. powiązania omawianych treści z innymi działami matematyki,
6. najważniejsze punkty dowodów prezentowanych twierdzeń.

Ponadto, oczekuje się od studenta zdającego egzamin znajomości treści specjalizacyjnych objętych zaliczonymi przedmiotami specjalizacyjnymi związanymi z tematyką pracy magisterskiej.