

Wm 20.05.20

dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
ul. Powstańców Warszawy 12
35-959 Rzeszów

Rzeszów 18.05.2020

Recenzja poprawionej rozprawy doktorskiej mgr Katarzyny Broniszewskiej
“Indeksy topologiczne w teorii grafów”

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy wybranych indeksów topologicznych w grafach. W szczególności opisane zostały dwa typy indeksów: indeksy topologiczne wywodzące się z klasycznego indeksu Wienera (zmodyfikowany indeks Wienera, biegunowy indeks Wienera, hiper-Wiener indeks) oraz indeksy związanych z acentrycznością (AEDS indeks i EDS indeks). Praca jest podzielona na trzy rozdziały w tym pierwszy rozdział to wprowadzenie, które zawiera podstawowe definicje i oznaczenia. Na początku rozprawy zamieszczone jest streszczenie w języku polskim i angielskim co jest zgodne z wymogami stawianymi rozprawom doktorskim wg art. 13 Ustawy.

Na końcu zamieszczone jest podsumowanie, lista symboli i oznaczeń, spis rysunków oraz licząca 99 pozycji bibliografia. Cała rozprawa liczy 94 strony. Układ rozprawy jest właściwy a tytuł zgodny z jej treścią.

Zasadnicza część pracy jest zawarta w rozdziale drugim i w rozdziale trzecim. W rozdziale drugim przedstawione zostały indeks Wienera i indeksy pochodzące od indeksu Wienera. W podrozdziałach 2.1 oraz 2.2 zamieszczone są definicje tych indeksów (indeksu Wienera grafu - będącego sumą odległości pomiędzy wierzchołkami w grafie - oraz definicje indeksów typu Wienera: biegunowego indeksu Wienera, indeksu hyper-Wiener, zmodyfikowanego indeksu Wienera wraz z umiejscowieniem tych pojęć w literaturze i przedstawieniem problemów dotyczących tych indeksów, które są w literaturze rozważane. Nowe wyniki zawarte w pracy doktorskiej dotyczące indeksów typu Wienera są związane z uogólnionym biegunowym indeksem Wienera. Głównym wynikiem rozdziału drugiego jest opisanie ogólnego przypadku dla maksymalnych wartości uogólnionego biegunowego indeksu Wienera dla dwudrzew ze specjalnymi założeniami. Rezultaty zamieszczone w tym podrozdziale pochodzą z publikacji [7], współautorstwa Pani mgr Katarzyny Broniszewskiej. Ta część rozprawy dotycząca dwudrzew została przeredagowana i poprawiona w stosunku do wersji poprzedniej.

Rozdział trzeci jest najmocniejszą częścią rozprawy i dotyczy indeksów związanych z acentrycznością. Jeden z podrozdziałów poświęcony jest indeksowi AEDS (z ang. adjacent eccentric distance sum index). Indeks ten wprowadzili Sadana i Madan w 2002 roku. W przedstawionej rozprawie zostały podane własności tego indeksu oraz jego dolne i górne oszacowania. Znane są wyniki dotyczące oszacowania tego indeksu uzyskane w 2002 roku przez Hua i Yu wraz z charakteryzacją grafów ekstremalnych. W przedłożonej rozprawie podane zostało dolne i górne oszacowanie indeksu AEDS będące uogólnieniem wyniku Hua i Yu (twierdzenie 3.1.4). Inne oszacowania indeksu AEDS zostały uzyskane przy wykorzystaniu indeksu Wienera (twierdzenie 3.1.8) a w dalszej części tego podrozdziału



podane zostało jeszcze dokładniejsze oszacowanie (twierdzenie 3.1.11) i jest to nowy rezultat, który nie był zamieszczony w poprzedniej wersji rozprawy. Nie jest on jeszcze opublikowany lecz umieszczony w manuskrypcie ([6]). Scharakteryzowane zostały również grafy ekstremalne dla których osiągane są maksymalne wartości indeksu AEDS. W dalszej części trzeciego rozdziału rozważane są oszacowania indeksu AEDS w zależności od różnych parametrów. W literaturze można znaleźć oszacowania indeksu AEDS w zależności od znanych parametrów grafowych (na przykład w zależności od: minimalnego stopnia wierzchołka, spójności wierzchołkowej, spójności krawędziowej, liczby chromatycznej). W rozprawie doktorskiej jest dokonany przegląd takich oszacowań. Wśród tych rezultatów znajdujemy oszacowania indeksu AEDS podane przez Qu i Cao w 2015 roku w tym oszacowanie z wykorzystaniem liczby chromatycznej grafu. (twierdzenie 3.1.17). Oryginalny dowód tego twierdzenia jest skomplikowany, natomiast w rozprawie doktorskiej znajdujemy nowy elegancki dowód, co jest warte podkreślenia. W kolejnym podrozdziale rozważana jest specjalna klasa grafów będących złączeniem dowolnego spójnego grafu i gwiazdy. Dokonując dla grafów z tej klasy szczególnej operacji (ściągnięcia krawędzi) dokonane zostało porównanie jaki ma to wpływ na wartość indeksu AEDS. Podrozdział ten zawiera także nowy rezultat dotyczący wpływu transformacji grafowych na wartość indeksu AEDS (twierdzenie 3.1.23), którego nie było w poprzedniej wersji rozprawy.

Kolejny rozważany indeks związany z acentrycznością to indeks EDS (z ang. eccentric distance sum), któremu został poświęcony podrozdział 3.2. Indeks ten wprowadzili w 2002 roku Gupta, Singh i Madana. W rozprawie podane zostały dolne oszacowania tego indeksu dla różnych klas grafów (twierdzenie 3.2.10, twierdzenie 3.2.11), które uogólniają wyniki Hua, Xu i Wen dla kaktusów z 2011 roku.

Tematyka rozprawy doktorskiej jest interesująca i aktualna o czym świadczy bibliografia obejmująca w zdecydowanej większości artykuły opublikowane stosunkowo niedawno. Wyniki zawarte w rozprawie są w znacznej części opublikowane. Pani mgr Katarzyna Broniszewska jest współautorką trzech artykułów, (pozycje [5], [7], [8]) z czego 2 ukazały się w czasopiśmie *Annales UMCE, sectio A* a jeden w *Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems*.

W poprawionej rozprawie zostały zamieszczone nowe, nieopublikowane jeszcze wyniki. Praca została w wielu miejscach uzupełniona, poprawiona i dodatkowo wzbogacona rysunkami, które ułatwiają zrozumienie omawianego zagadnienia.

Niniejsza praca w porównaniu do wersji pierwotnej jest lepiej zredagowana ale mimo to po wersji poprawianej należałoby się spodziewać większej staranności. Nadal występuje wiele niepoprawnych konstrukcji zdaniowych. Zniechęca do czytania zwłaszcza rozdział pierwszy, w którym zamieszczone są podstawowe definicje, zauważalny jest brak konsekwencji w kolejności przedstawianych definicji. Na przykład na początku strony 8 jest definicja grafu spójnego a definicję spójnej składowej znajdujemy na końcu strony 9. Wiele z tych definicji byłoby bardziej eleganckich gdyby zostały zapisane przy użyciu języka matematycznego (promień grafu, średnica grafu itd.). Niektóre pojęcia są ilustrowane przykładami ale podpisy pod tymi rysunkami nie zawsze są poprawne. Pod rysunkiem 1.4 przedstawiającym cykl C_6 jest umieszczony podpis „Przykład cyklu C_6 ” zamiast cykl C_6 . Analogicznie pod rysunkiem 1.9. Kolorowanie wierzchołków grafu jest funkcją określoną na zbiorze wierzchołków, można było użyć właśnie takiego określenia i zapisać definicję w

sposób formalny. Definicja stopnia wierzchołka powinna być zapisana przy użyciu pojęcia incydencji. Pojęcie ścieżki w grafie i ścieżki jako grafu nie jest rozróżnione. W pracy są używane dwa różne symbole na oznaczenie krawędzi, nie zostało to poprawione w stosunku do poprzedniej wersji pracy. Także w dalszej części pracy jest wiele nieścisłości, np. na str. 17 rozważając graf jednocykliczny autorka powołuje się na lemat 2.1.1, który jest dla drzew. W poprzedniej wersji pracy był lemat także dla grafów jednocyklicznych został tu pominięty. Zdanie „Różne typy transformacji mają różne znaczenie praktyczne” jest niefortunne, należy unikać takich powtórzeń, inny przykład ze strony 19 „uproszczyć wygląd grafu”. W sformułowaniach twierdzeń też występują niedociągnięcia np. str. 20 twierdzenie 2.3.2. brak założenia o grafie G . Takich niedociągnięć w pracy jest więcej.

Przedstawione powyżej uwagi krytyczne nie wpływają znacząco na moją pozytywną ocenę przedłożonej rozprawy doktorskiej. Uważam, że Pani mgr Katarzyna Broniszewska wykazała się znajomością tematu, literatury, technik dowodowych i narzędzi stosowanych w teorii grafów. Niektóre dowody wymagały żmudnych rachunków i pomysłowości. Pani mgr Katarzyna Broniszewska wykazała się umiejętnościami prowadzenia pracy naukowej i wykazuje się ogólną wiedzą teoretyczną w dyscyplinie matematyka co jest zgodne z wymogami stawianymi rozprawom doktorskim wg art. 13 Ustawy. Zawarte wyniki w rozprawie doktorskiej rozszerzają istniejącą wiedzę dotyczącą omawianych indeksów topologicznych i wnoszą pewien wkład w teorię grafów.

W związku z powyższym podtrzymuje moje stanowisko i stwierdzam, że przedłożona rozprawa spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim określone w art. 13 Ustawy i wnoszę o dopuszczenie Pani mgr Katarzyny Broniszewskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego

Imię 