

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Katarzyny Broniszewskiej

“Indeksy topologiczne w teorii grafów”

Przedmiotem rozprawy są wybrane indeksy topologiczne w grafach. W szczególności rozprawa dotyczy dwóch typów indeksów: indeksów topologicznych wywodzących się z klasycznego indeksu Wienera (wprowadzonego w 1947 roku przez Harry'ego Wienera) oraz indeksów związanych z acentrycznością. Praca liczy 71 stron, składa się ze wstępu i trzech rozdziałów, z czego pierwszy to podstawowe definicje. Na końcu znajduje się lista symboli, spis rysunków oraz licząca 91 pozycji bibliografia. Układ rozprawy jest właściwy a tytuł zgodny z jej treścią.

Zasadnicza część pracy jest zawarta w rozdziale drugim i w rozdziale trzecim. Rozdział drugi dotyczy indeksu Wienera i indeksów typu Wienera. Podrozdziały 2.1 oraz 2.2 to wprowadzenie do zasadniczego tematu rozprawy. Podana została definicja indeksu Wienera (będącego sumą odległości pomiędzy wierzchołkami w grafie) oraz definicje indeksów typu Wienera: biegunowego indeksu Wienera, indeksu hyper-Wiener, zmodyfikowanego indeksu Wienera wraz z umiejscowieniem tych pojęć w literaturze i przedstawieniem problemów dotyczących tych indeksów, które są w literaturze rozważane. Nowe wyniki zawarte w pracy doktorskiej dotyczące indeksów typu Wienera są związane z uogólnionym biegunowym indeksem Wienera. W przypadku tego indeksu znane są jego wartości dla drzew oraz algorytmy jego wyznaczania. W rozprawie zostały zdefiniowane, w sposób rekurencyjny, dwudrzewa i dla tej klasy grafów wyznaczona została maksymalna wartość uogólnionego biegunowego indeksu Wienera. Ponadto zaprezentowane są dwa przykłady dwudrzew ekstremalnych. W rozdziale drugim podane jest również ciekawe twierdzenie (Twierdzenie 2.4.10) o realizacji, podające że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 4$ istnieje dwudrzewo o określonych własnościach z ekstremalnym biegunowym indeksem Wienera.

Rozdział trzeci jest najmocniejszą częścią rozprawy i dotyczy indeksów związanych z acentrycznością. Są to: indeks AEDS (z ang. adjacent eccentric distance sum index) oraz index EDS (z

ang. eccentric distance sum). Indeksy te (podobnie jak indeksy typu Wienera) są wielkościami liczbowymi i podstawowe problemy są związane z uzyskiwaniem dobrych oszacowań dla tych indeksów. Index AEDS wprowadzili Sardana i Madan w 2002 roku. Znane są wyniki dotyczące oszacowania tego indeksu zarówno dolne jak i górne podane przez Hua i Yu wraz z charakteryzacją grafów ekstremalnych. W przedłożonej rozprawie podane zostało dolne oszacowanie indeksu AEDS będące uogólnieniem wyniku Hua i Yu (Twierdzenie 3.1.4.) Podane są również nowe górne oszacowania dla indeksu AEDS z wykorzystaniem indeksu Wienera (Twierdzenie 3.1.5, Twierdzenie 3.1.6). W literaturze można znaleźć różne oszacowania indeksu AEDS w zależności od znanych parametrów grafowych (na przykład w zależności od: minimalnego stopnia wierzchołka, liczby pokrywającej, spójności wierzchołkowej, spójności krawędziowej, liczby chromatycznej). W rozprawie doktorskiej jest dokonany przegląd takich oszacowań. Wśród tych rezultatów znajdujemy dolne oszacowanie indeksu AEDS podane przez Qu i Cao w 2015 roku z wykorzystaniem liczby chromatycznej grafu. (Twierdzenie 3.1.9). Oryginalny dowód tego twierdzenia jest skomplikowany, natomiast w rozprawie doktorskiej znajdujemy nowy elegancki dowód, co jest warte podkreślenia.

W kolejnym podrozdziale rozważana jest specjalna klasa grafów będących połączeniem dowolnego spójnego grafu i gwiazdy. Dokonując dla grafów z tej klasy szczególnej operacji (ściągnięcia krawędzi), dokonane zostało porównanie jaki ma to wpływ na wartość indeksu AEDS.

Kolejny rozważany indeks związany z acentrycznością to indeks EDS, któremu został poświęcony podrozdział 3.2. Indeks ten wprowadzili w 2002 roku Gupta, Singh i Madana. W rozprawie podane zostały dolne oszacowania tego indeksu dla specjalnych struktur grafowych (Twierdzenie 3.2.9, Twierdzenie 3.2.10), które uogólniają wyniki Hua, Xu i Wen.

Tematyka rozprawy doktorskiej jest interesująca i aktualna o czym świadczy bibliografia obejmująca, w zdecydowanej większości, artykuły opublikowane stosunkowo niedawno. Wyniki zawarte w rozprawie są w znacznej części opublikowane. Pani mgr Katarzyna Broniszewska jest współautorką trzech artykułów, (pozycje [5], [6], [7]) z czego 2 ukazały się w czasopiśmie *Annales UMCE, sectio A* a jeden w *Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems*. Wszystkie zamieszczone w rozprawie wyniki są w mojej ocenie merytorycznie poprawne.

Uważam, że praca nie jest zredagowana ze szczególną dbałością o styl i stronę edytorską. Znajdują się liczne literówki i niezbyt poprawne konstrukcje zdaniowe. Także rysunki znajdują się zawsze na górze strony co nie zawsze jest fortunate (np. str. 15, 16). W rozdziale pierwszym podrozdział nie jest konieczny skoro jest tylko jeden. Co więcej pierwsze zdanie z podrozdziału 1.1 „*Grafem nazywamy zbiór wierzchołków, które mogą być połączone krawędziami w taki sposób, że*

każda krawędź kończy się i zaczyna w którymś z wierzchołków” nie jest ścisłą definicją grafu, której należałoby się spodziewać w pracy doktorskiej. Takich uchybień jest więcej np. oznaczenie krawędzi bywa różne: jako $\{x,y\}$ (str. 11) a później xy . Symbol grafu pełnego (str. 8) pojawia się przed jego definicją (str. 9). Także występujące pomyłki typu: *indeks został wprowadzony przez Hararego Wienera* zamiast Harry’ego Wienera są niefortunne, biorąc pod uwagę znaczenie Hararego w teorii grafów. Są to jedynie przykłady występujących niedociągnięć.

Przedstawione powyżej uwagi krytyczne, nie wpływają istotnie na moją pozytywną ocenę przedłożonej rozprawy doktorskiej. Uważam, że Pani mgr Katarzyna Broniszewska przedstawiła wartościową rozprawę, wykazała się znajomością tematu, literatury, technik dowodowych i narzędzi stosowanych w teorii grafów. Zawarte wyniki w rozprawie doktorskiej rozszerzają wiedzę dotyczącą omawianych indeksów topologicznych i wnoszą pewien wkład w teorię grafów.

W związku z powyższym stwierdzam, że przedłożona rozprawa spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim określone w art. 13 Ustawy i wnoszę o dopuszczenie Pani mgr Katarzyny Broniszewskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Imię *libf*