

Dr hab. Grzegorz Gabor, prof. UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, dnia 21.08.2019 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Moniki Krajewskiej
pt. *Zagadnienia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań
różniczkowych w ciągowych przestrzeniach Banacha***

Przedstawiona rozprawa doktorska mgr Moniki Krajewskiej dotyczy, ogólnie mówiąc, twierdzeń o istnieniu rozwiązań problemu Cauchy'ego w nieskończone wymiarowych przestrzeniach Banacha typu ciągowego, tzn. w przestrzeniach c, c_0, l_∞ , i ich modyfikacjach w postaci przestrzeni ciągów temperowanych $c^\beta, c_0^\beta, l_\infty^\beta$. Liczy ona 76 stron, z czego cztery strony zajmuje Literatura, dwie - spis treści i trzy - Wstęp. Oparta jest na wynikach opublikowanych w trzech współautorskich pracach z promotorem, wykazanych pod numerami [7]-[9] w spisie literatury.

Problem istnienia rozwiązań problemu Cauchy'ego pozostaje aktualny, gdy badamy go w przestrzeniach nieskończonego wymiaru, gdzie znaleźć należy adekwatne warunki typu zwartości na tzw. prawą stronę równania. Jak słusznie zauważa Autorka, jednym ze sposobów opisanego typu warunków jest zastosowanie miar niezwartości. Dodajmy - właściwych miar niezwartości, gdyż po wyabstrahowaniu najistotniejszych własności miary niezwartości mamy możliwość zdefiniowania i użycia takich miar, które dadzą się stosunkowo łatwo „policzyć” lub choćby zgrać z własnościami pola wektorowego. Właśnie zastosowanie miar niezwartości w przestrzeniach ciągowych w zagadnieniu istnienia rozwiązań jest głównym celem badawczym mgr Moniki Krajewskiej.

Rozprawa zawiera sześć merytorycznych rozdziałów, z czego pierwszy to króciutkie przedstawienie podstawowych pojęć i oznaczeń. W rozdziale drugim, w podrozdziale 2.2, pojawiają się przestrzenie ciągów temperowanych, które odegrają kluczową rolę w dalszych rozważaniach. Rozpatrywanie ciągów temperowanych to ładny i użyteczny zabieg pozwalający na rozszerzenie klas badanych problemów. Pozostała część rozdziału drugiego to pewne przypomnienia znanych faktów z teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Sporo uwagi Autorka poświęca w rozdziale trzecim miarom niezwartości, a szczególnie definicji aksjomatycznej, aby następnie podać przykłady użytecznych miar w przestrzeniach ciągowych (podrozdziały 3.2 - 3.3), mających zastosowanie w technice pochodzącej od Darbo badania punktów stałych odwzorowań kondensujących. Konstrukcja miar niezwartości w przestrzeniach ciągów temperowanych (podrozdział 3.3) jest w zasadzie natychmiastowa, gdy znamy miary w przestrzeniach c, c_0, l_∞ z powodu izometrii odpowiednich par przestrzeni. Cenne jest, że Autorka, nie spotkawszy w literaturze dowodu równoważności miary niezwartości

Hausdorffa w przestrzeni c i miary μ_c zdefiniowanej wzorem (3.5), zastępującej zbieżność ciągu przez jego fundamentalność, sama napisała pełny dowód tego faktu (zob. Tw. 3.9). Mówi to o matematycznej dojrzałości i dbaniu o szczegóły opracowania danego zagadnienia.

Rozdział czwarty to przypomnienie pewnych znanych twierdzeń egzystencjalnych otrzymywanych przy użyciu miar niezwartości. Istotna część rozważań zaczyna się w rozdziale piątym, dlatego poświęcę temu więcej miejsca. Pojawiają się tu trzy główne twierdzenia (5.1, 5.3 i 5.6) oraz twierdzenie 5.7, które może być udowodnione analogicznie jak twierdzenie 5.6. Twierdzenie 5.1 odnosi się do problemu w przestrzeni l_1 . Autorka podaje pięć założeń (i)-(v), wśród których, w założeniu (ii), mówi, że prawą stroną równania jest funkcja $f : I \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, odwzorowująca w sposób ciągły zbiór $I \times l_1$ w l_1 . Pomijając fakt, że pewnie Autorka miała na myśli $\mathbb{R}^\infty$ w przeciwdziedzinie, taka redakcja sugeruje, że topologia jest brana z przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$, a nie l_1 . Ale jeśli tak, to o jaką topologię chodzi? Moim zdaniem, od razu należałoby napisać, że $f : I \times l_1 \rightarrow l_1$.

W podrozdziale 5.2 mgr Krajewska bada zagadnienie w przestrzeni l_∞ i tym razem prawa strona f równania jest już określona poprawnie. Zauważyć można, że z założenia (iii) wynika, iż f przekształca przestrzeń $I \times l_\infty$ w podprzestrzeń c_0 . Główny wynik tego podrozdziału to twierdzenie 5.3 z dość długim, szczegółowo przeprowadzonym, ładnym dowodem. Założenia są dostosowane do tego, by wykorzystać ogólne twierdzenie 4.3, ale wyrażone są w przystępny sposób i wykorzystują takie własności funkcji jak jednostajna zbieżność do zera na przedziale, jednakowa ciągłość i wspólna ograniczoność. Twierdzenie 5.3 zilustrowane jest dobrze dobranym przykładem 5.5.

Okazuje się, że pewne założenia twierdzenia 5.3 można nieco osłabić, o czym pisze Autorka w podrozdziale 5.3, ale dla pewnych szczególnych „prawych stron” równania (z zanikającym lub powiększającym się zaburzeniem). I tu chciałbym zwrócić uwagę na niewłaściwie, według mnie, zreagowane założenie (ii’):

Funkcja $t \rightarrow f(t, x)$ działająca ze zbioru $I \times l_\infty$ jest jednostajnie ciągła na I ze względu na x należący do dowolnej kuli $B(x_0, r)$ w przestrzeni l_∞ .

Czy chodzi o funkcję działającą ze zbioru I ? Czy zamiast „ze względu na” nie powinno być „dla każdego”? Ponadto w dowodzie twierdzenia chodzi zapewne o jednostajną ciągłość, a nie jednostajną zbieżność funkcji f .

Moim zdaniem, najistotniejszy fragment rozprawy to rozdział 6. Badane są tu równania w przestrzeniach ciągów temperowanych, a twierdzenia ilustrowane są przykładami. Mam jednak też kilka uwag krytycznych. Pierwsza uwaga dotyczy dwóch przykładów 6.1-6.2 otwierających rozdział i mających pokazać, że „nawet w prostych sytuacjach klasyczne przestrzenie ciągowe nie są wystarczające do ulokowania naszych rozważań” (cytat ze str.42). W pierwszym przykładzie po prostu warunek początkowy nie leży w przestrzeni l_∞ , a w drugim pole wektorowe

wyprowadza stan poza przestrzeń, więc oczywiste jest, że sformułowania problemów są nieadekwatne (bardziej niż sama przestrzeń fazowa). Warto zauważyć, że w przykładzie 6.1 wystarczy wziąć punkt początkowy z l_∞ , aby $x(t) \in l_\infty$ dla każdego $t > 0$.

Wyniki podrozdziału 6.2 są eleganckie, nowe, z dobrze dobranymi założeniami i precyzyjnymi dowodami. Dotyczy to zarówno sytuacji układów dolnie przekątniowych jak i górnio przekątniowych. Podrozdział 6.3 dotyczy zagadnień w przestrzeni c^β , a twierdzenie 6.13 uogólnia pewne wcześniej znane wyniki. Nie wiem, czy wynikło to z konieczności włączenia w rozprawę wyników kilku artykułów, ale Autorka zmieniła tu konwencję oznaczania zaburzenia w prawej stronie równania różniczkowego w stosunku do poprzedniego podrozdziału, co trochę utrudnia czytanie. Sam wynik jednak i jego dowód są ładnie napisane, z dużą dojrzałością. Chciałbym podzielić się tu pewną obserwacją dotyczącą przykładów ilustrujących wyniki tego i kolejnych podrozdziałów (chodzi o przykłady 6.14 i 6.17). O ile się nie mylę, w przykładzie 6.14 wystarczy wziąć zamiast ciągu temperującego $(\frac{1}{n})$ ciąg $(\frac{1}{n^2})$, aby przykład podpadał pod rozważania w przestrzeni c_0^β . W przykładzie 6.17 podobnie: dla $(\beta_n) := (\frac{1}{n^2})$ trafiamy do c_0^β . Spodziewałbym się raczej przykładów, w których taka prosta zamiana ciągu temperującego nie sprowadzi wszystkiego do wcześniejszych rozważań. Na przykład prawa strona równania nie przeprowadzi przestrzeni c_0^β w siebie. Jeżeli mylę się w moim odbiorze dobranych przykładów, to myślę, że przedstawiony dobór mógłby być lepiej uzasadniony.

Przed ostateczną konkluzją chciałbym jeszcze wspomnieć pewne drobne usterki w rozprawie nie mające wpływu na istotę otrzymanych wyników, lecz jednak występujące w ważnych miejscach (pomijam inne literówki).

1. 7₂ (str. 7 linia 2 od dołu) Powinno być inne oznaczenie normy.
2. 10¹³ (linia 13 od góry) Literówka (?) sprawiająca, że norma jest niewłaściwie określona.
3. 11₁₂ Należałoby założyć, że $x_n \neq 0$.
4. 13₁₁ Chodzi zapewne o „dokładnie jedno”.
5. 14² Powinno być x_{n-1} .
6. 14₁₁ Powinno być jednolicie: f_n zamiast $f_n(t)$.
7. 15₅ własności przestrzeni Banacha
8. 16₁₄ Powinno być „podzbiorów” zamiast „ciągów”.
9. 17₁₃₋₁₄ Autorka pisze, że w nieskończonym wymiarze wypisane nierówności mogą być ostre. Jedna z nich dla niezwartego zbioru zawsze jest ostra. Czy więc chodziło o to, że obie jednocześnie mogą być ostre?

10. 18₁₃ Powinno być „podzbiór X_∞ ”.
11. 19¹² Powinno być zero, a nie zbiór pusty.
12. 22⁷ Użycie słowa „Następnie” jest dziwne.
13. 24⁹ Powinno być „złożona”, a nie „złożonego” (inny sens merytoryczny).
14. 24¹¹⁻¹³ Jest tu kolizja oznaczeń. Raz $y_i \in \mathbb{R}$, a raz $y_i \in l_\infty$.
15. 25¹⁰ Jest błąd w określeniu miary niezwartości (zły wykładnik).
16. 28₁₆ Chodziło o „tzw”.
17. 28₁₃ To zdanie jest nieprawdziwe!
18. 28₈ Tw. 4.2 powinno być odniesione do literatury, choćby do tw. 7.5 w [13].
Podobnie tw. 4.3 na str. 29.
19. 31₈ jest zbędny nawias.
20. 32³ Powinno być raczej „z Twierdzenia 4.2”.
21. 32⁸ Brak nawiasu.
22. 35₁₁ W drugim znaku sumy powinno być sumowanie od $j = n$.
23. 35₅ Źle postawione nawiasy.
24. 41³ Raczej szacowanie jest dla f_n .
25. 43₇ Czasem się zdarza, tak jak tu, że zamiast 0 jest niewłaściwie wstawione „o” (np. również na str. 50).
26. 44₁ Zbędny nawias.
27. 45₁₀ Napisana równość nie musi być prawdziwa. Powinna być nierówność nieostra.
28. 48³ Powinno być j_1 zamiast j_i .
29. 53¹ Raczej (a_{nm}) .
30. 57² Zbędne jedno „to”.
31. 68₁₂ „Sformułujemy”.

Podsumowanie

Przechodząc do podsumowania stwierdzam, że, mimo moich uwag krytycznych, przedstawiona rozprawa doktorska pokazuje umiejętność dobrego zastosowania wiedzy przez Autorkę przy rozwiązaniu zaawansowanego zagadnienia matematycznego i oryginalność wyników. Jest ładnie zredagowana, choć Autorka nie ustrzegła się błędów (o niektórych wspomniałem wyżej). Uważam, że rozprawa mgr Moniki Krajewskiej spełnia wymagania stawiane w przewodach doktorskich (art. 13.1 ustawy z 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym (...)) oraz wymagania zwyczajowe i **wnoszę o jej dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**



Grzegorz Gabor