

Prof. dr hab. Kazimierz Nikodem
Katedra Matematyki
Akademii Techniczno-Humanistycznej
w Bielsku-Białej

Bielsko-Biała, 6.08.2019r.

R e c e n z j a

rozprawy doktorskiej mgr Moniki Krajewskiej

pt. "*Zagadnienia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w ciągłych przestrzeniach Banacha*".

Ze względu na wszechstronne zastosowania w naukach technicznych i przyrodniczych, teoria równań różniczkowych zwyczajnych jest jednym z najważniejszych działów matematyki. Po kilkuset latach rozwoju, w połowie XX wieku można było uważać, że jest to teoria niemal kompletna. Jednak w roku 1950 ukazała się praca J. Dieudonné, w której pokazał on, że pewne klasyczne wyniki dotyczące równań różniczkowych w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ przestają być prawdziwe w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych. Na przykład twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego:

$$x' = f(t, x), \quad x'(t_0) = x_0 \quad (1)$$

przy założeniu ciągłości funkcji f nie jest prawdziwe w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha. Stało się to impulsem do poszukiwania nowych warunków gwarantujących istnienie rozwiązania zagadnienia (1). Jednym z narzędzi, które okazało się niezwykle funkcjonalne, były miary niezwartości, a przydatnym założeniem – warunek:

$$\mu(f(t, X)) \leq \omega(t, \mu(X)), \quad (2)$$

gdzie X jest dowolnym ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha E , μ jest miarą niezwartości określoną na E , a $\omega = \omega(t, u)$ jest tzw. funkcją porównawczą Kamkego. Początkowo jako miarę μ brano miarę niezwartości Kuratowskiego lub Hausdorffa, ale wygodniejsze do zweryfikowania warunku (2) okazały się miary określone za pomocą aksjomatyki Banaschia-Goebla. Naturalnymi przestrzeniami Banacha, pojawiającymi się często w zastosowaniach, są w tym kontekście przestrzenie ciągłe: c_0 , c , l_p , l_∞ . Wtedy bowiem równanie różniczkowe (1) jest równoważne nieskończonemu układowi równań

różniczkowych skalarnych. Takie układy pojawiają się m.in. w klasycznej już monografii K. Deimlinga „*Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*”, Lecture Notes in Math. 596, Springer, Berlin 1977 i były również badane w trzech współautorskich publikacjach Moniki Krajewskiej i Józefa Banasia. Rozprawa doktorska mgr Moniki Krajewskiej stanowi kontynuację tego nurtu badań.

Omawiana rozprawa doktorska zawiera 75 stron i składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów i spisu literatury. Cztery pierwsze rozdziały można uznać za materiał przygotowawczy. Zawierają one podstawowe wiadomości dotyczące m.in. ciągowych przestrzeni Banacha, przestrzeni ciągów temperowanych oraz miar niezwartości, wykorzystywane w dalszej części pracy. Należy podkreślić, że materiał ten jest dobrze opracowany i istotnie zwiększa kompletność całej pracy. W rozdziale trzecim podane są również precyzyjne dowody pewnych faktów znanych jako tzw. „folklor”, ale używanych w literaturze bez podawania źródeł czy dowodów (są to twierdzenia 3.9 i 3.10 o formułach wyrażających miary niezwartości w przestrzeniach c i l_∞). Autorka wprowadza tu również formuły definiujące miary niezwartości w przestrzeniach ciągów temperowanych. W rozdziale piątym podane są twierdzenia o istnieniu rozwiązań w przestrzeniach l_1 i l_∞ nieskończonych układów równań różniczkowych z zadanymi warunkami początkowymi. W szczególności Autorka analizuje układy mające postać układów liniowych zaburzonych składnikiem nieliniowym (tzw. układy semiliniowe).

Rozdział szósty zawiera twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych semiliniowych układów równań różniczkowych w przestrzeniach ciągów temperowanych. Użycie ciągów temperowanych pozwala badać szerszą klasę układów równań, a zakres możliwych zastosowań znacznie się powiększa. Autorka rozpatruje dwie sytuacje. W pierwszej zakłada się, że część liniowa równań wchodzących w skład układu zawiera tylko skończoną liczbę składników, przy czym liczby tych składników są wspólnie ograniczone. Mówimy wówczas, że części liniowe równań w rozważanym układzie semiliniowym mają stałą szerokość. Współczynniki występujące w części liniowej mogą być wtedy stosunkowo duże, a takie sytuacje spotyka się najczęściej w praktyce. W sytuacji drugiej zakłada się, że każda część liniowa równań wchodzących w skład układu mają nieskończenie wiele składników. Takie założenie powoduje jednak, że współczynniki występujące w części liniowej są stosunkowo niewielkie (np. zbudowany z nich szereg jest bezwzględnie zbieżny). W obu przypadkach Autorka dowodzi twierdzeń o istnieniu rozwiązań takich układów w przestrzeni ciągów

temperowanych c_0^β , osobno dla układów dolnie przekątniowych (Twierdzenia 6.3 i 6.5) oraz układów górnio przekątniowych (Twierdzenia 6.8 i 6.10). Przedstawia również twierdzenia o istnieniu rozwiązań w przestrzeni ciągów temperowanych c^β dla zaburzonego nieskończonego układu przekątniowego (Twierdzenie 6.13) oraz w przestrzeni L_∞^β dla semiliniowych układów dolnie przekątniowych (Twierdzenia 6.15).

Jak widać z powyższego omówienia, przedstawiona rozprawa jest obszernym i wielowątkowym studium nieskończonych układów równań różniczkowych w ciągowych przestrzeniach Banacha. Autorka zawarła w niej wiele oryginalnych i interesujących wyników dotyczących istnienia rozwiązań takich układów. Twierdzenia rozdziału szóstego są, moim zdaniem, najważniejszymi wynikami rozprawy. Ich dowody polegają na pokazaniu, że w każdym przypadku spełnione są założenia pewnej modyfikacji twierdzenia pochodzącego od J. Banasia i K. Goebela (Twierdzenie 4.3) i zastosowaniu tego twierdzenia do otrzymania tezy, ale nie są one łatwe i wymagały pokonania wielu trudności technicznych. Wykorzystuje się w nich również nietrywialne pojęcia z analizy funkcjonalnej i równań różniczkowych, takie jak przestrzeń Banacha słabo zwarcie generowalna, czy funkcje porównawcze Kamkego. Świadczy to o pomysłowości i dobrym przygotowaniu teoretycznym Autorki. Przedstawione wyniki uogólniają kilka rezultatów uzyskanych wcześniej w klasycznych przestrzeniach ciągowych m.in. przez J. Banasia i M. Lecko, K. Deimlinga oraz M. Mursaleena i A. Alotaibi. Na podkreślenie zasługuje duża liczba przykładów dobrze ilustrujących dowodzone twierdzenia.

Redakcja pracy jest bardzo staranna, choć nie udało się Autorce uniknąć drobnych usterek i błędów językowych. Poniżej podaję kilka uwag szczegółowych:

- Str.15: Zamiast „geometrycznych własności Banacha“ powinno być: geometrycznych własności przestrzeni Banacha.
- Str.16: Zamiast „domkniętych, niepustych i ograniczonych ciągów“ powinno być: domkniętych, niepustych i ograniczonych zbiorów.
- Str. 28, wiersz 11: „conajwyżej“ pisze się osobno.
- Str. 31: Zamiast „ $f: I \times \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{R}$ “ powinno być $f: I \times \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{R}^\infty$.
- Str. 35, wiersz 5 od dołu: Brakuje nawiasu }

- Str. 58 (i w innych miejscach): Zwroty typu: „Oczywiście mamy, że ...“ lub „Z drugiej strony mamy, że ...“ nie są poprawne.
- Str. 67: W tytule podrozdziału 6.4 zamiast: „nieskończonego układów równań“ , powinno być: nieskończonych układów równań

Wymienione powyżej usterki w żadnym stopniu nie zmniejszają wartości merytorycznej omawianej pracy.

Jak już wspomniałem wcześniej, praca ta zawiera wiele oryginalnych i wartościowych rezultatów stanowiących istotny wkład w teorię równań różniczkowych w ciągowych przestrzeniach Banacha. Stosowane metody jak i sposób prowadzenia rozumowań świadczą o dużej wiedzy teoretycznej Doktorantki z zakresu wyżej wymienionych obszarów matematyki oraz o jej dojrzałości naukowej i umiejętności prowadzenia przez nią samodzielnych badań.

W moim przekonaniu recenzowana praca spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim przez obowiązującą Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki.

Dlatego wnioskuję o dopuszczenie mgr Moniki Krajewskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

W. Nitkowski

Białko-Biała, 6.8.2019 r.