

Nikodem Dymski

studia doktoranckie z matematyki

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Conservation laws in the modelling of collective phenomena

Na przestrzeni ostatnich dziesięcioleci zatłoczone ulice, wypadki samochodowe oraz związane z ruchem samochodowym zanieczyszczenie powietrza stały się codziennością. Naukowcy z różnych dziedzin nauki tworzą zaawansowane modele matematyczne, pomagające zrozumieć zjawiska ruchu drogowego, rozwijać efektywnie sieć dróg oraz zmniejszać korki uliczne. Ta rozprawa doktorska poświęcona jest makroskopowemu modelowaniu ruchu drogowego, które formułuje zależności między uśrednionymi charakterystykami przepływu ruchu takimi jak gęstość, przepływ oraz prędkość. Modele makroskopowe w sposób naturalny prowadzą do stosowania praw zachowania, które są szczególnymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. W ostatnich latach ta klasa równań jest coraz chętniej rozpatrywana, ale wciąż dostępnych jest niewiele wyników teoretycznych. Spowodowane jest to dwoma poważnymi trudnościami. Pierwszym z nich jest nieliniowa, hiperboliczna natura równań, mogąca prowadzić do rozwiązań słabych rozwiązań, niestabilności lub dyfuzyjności schematów numerycznych. Drugim natomiast jest brak jednoznaczności słabych rozwiązań oraz potrzeba rozważania egzotycznych funkcjonałów w celu wybrania jednoznacznego, fizycznie uzasadnionego rozwiązania.

W rozdziale pierwszym prezentujemy wstęp do modelowania ruchu dro-

gowego. Na początku podajemy główny podział modeli matematycznych, przy zwróceniu uwagi na poziom szczegółowości. Podajemy różnice pomiędzy strukturą płynów a strukturą ruchu drogowego, oraz wymieniamy podstawowe założenia potrzebne do skonstruowania poprawnego makroskopowego modelu ruchu drogowego. Definiujemy trzy charakterystyki przepływu ruchu, to jest (średnią) gęstość, (średnią) prędkość i (średni) przepływ, wyprowadzamy podstawową zależność pomiędzy nimi a następnie formujemy prawo zachowania. Rozdział zakończony jest krótkim przedstawieniem stosowanych modeli oraz wyników uzyskanych podczas trwania studiów doktoranckich.

Drugi rozdział poświęcony został szczegółowemu omówieniu podstawowych modeli makroskopowych dla ruchu drogowego. Jako pierwszy prezentujemy model zaproponowany przez Lighthilla, Withama [7] oraz Richardsa [10] (LWR). Opisuje on dynamikę ruchu drogowego poprzez skalarne prawo zachowania wraz z warunkiem $v = v(\rho)$. Następnie wprowadzamy pojęcia fali rozrzedzającej, fali uderzeniowej oraz nieciągłości kontaktowej dla modelu LWR oraz definiujemy rozwiązanie zagadnienia Riemanna $\mathcal{RS}_{LWR}$. Na koniec podajemy listę wad modelu LWR.

Kolejny opisywany model został zaproponowany przez Aw, Rascła [1] oraz niezależnie Zhanga [11] (ARZ). Jest on opisany poprzez układ dwóch praw zachowania. Pierwsze z nich jest prawem zachowania liczby pojazdów, natomiast drugie jest uogólnionym prawem zachowania pędu. Na początku rozdziału podajemy podstawowe własności układu, takie jak wartości i wektory własne oraz odpowiadające im znaczniki Lagrange’a. Następnie definiujemy rozwiązanie zagadnienia Riemanna $\mathcal{RS}_{ARZ}$ przy pomocy podstawowych fal. Na koniec podajemy definicje słabego rozwiązania oraz rozwiązania entropijnego dla modelu ARZ.

W ostatniej części tego rozdziału opisujemy modele z przemianą fazową (PT). Modele PT definiują odmiennie ruch drogowy dla dróg niezatłoczonych oraz

dróg zatłoczonych. Z tego powodu rozważamy modele PT składające się z modelu LWR na zbiorze Ω_f odpowiadającym niezatłoczonym drogom oraz układu dwóch praw zachowania na zbiorze Ω_c odpowiadającym zatłoczonym drogom. Przedstawiamy dwie wersje modeli PT, oznaczone przez PT^a i PT^p i wprowadzone w [3, 6]. Następnie podajemy nasze uogólnienia [5] na przypadki odpowiednio bez fazy metastabilnej ($\Omega_f \cap \Omega_c = \emptyset$) oraz z fazą metastabilną ($\Omega_f \cap \Omega_c \neq \emptyset$). Następnie definiujemy rozwiązania dopuszczalne dla zagadnienia Riemanna oraz spełniające tę definicję rozwiązania zagadnienia Riemanna $\mathcal{RS}_R$ i $\mathcal{RS}_S$. Rozdział kończymy propozycjami dotyczącymi niezmienniczości oraz ciągłości w przestrzeni L^1_{loc} funkcji lokalnie całkowalnych dla $\mathcal{RS}_R$ i $\mathcal{RS}_S$.

W rozdziale trzecim opisujemy model LWR ze stałym ograniczeniem na przepływ. Innymi słowy, rozpatrujemy sytuację, w której maksymalny przepływ samochodów jest ograniczony w pewnym miejscu na drodze. Dzięki takim rozważaniom możemy modelować ruch drogowy na rogatek, czy w miejscach robót drogowych. Definiujemy rozwiązanie zagadnienia Riemanna $\mathcal{CRS}_{LWR}$ oraz podajemy jego własności. Następnie definiujemy entropijne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego oraz przypominamy twierdzenie o istnieniu jednoznacznego rozwiązania entropijnego zagadnienia Cauchy'ego.

Rozdział czwarty został poświęcony modelowi ARZ ze stałym ograniczeniem na przepływ oraz wynikiem własnym uzyskanym w [8]. W naszej pracy udowadniamy istnienie słabego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego w klasie funkcji o wahaniu ograniczonym dla modelu ARZ ze stałym ograniczeniem na przepływ. W artykule rozpatrujemy rozwiązanie zagadnienia Riemanna dla którego warunek Rankine'a-Hugoniota nie jest spełniony dla drugiego równania. Dowód głównego twierdzenia opiera się na metodzie Wave Front Tracking. Mówiąc dokładniej, wprowadzamy siatkę i definiujemy przybliżone rozwiązanie zagadnienia Riemanna $\mathcal{CRS}_{ARZ}^n$ poprzez podział fali rozrzedzającej.

Następnie, dzięki $\mathcal{CRS}_{\text{ARZ}}^n$ konstruujemy przybliżone rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla tego problemu. Przy pomocy malejącego w czasie funkcjonału Υ pokazujemy, że wahanie aproksymowanego rozwiązania jest ograniczone oraz liczba fal i interakcji między nimi jest skończona. Następnie, stosując twierdzenie Helly'ego otrzymujemy istnienie zbieżnego podciągu aproksymowanych rozwiązań. Ostatecznie wykazujemy, że funkcja graniczna jest rzeczywiście słabym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla modelu ARZ ze stałym ograniczeniem na przepływ.

W rozdziale piątym opisujemy modele PT^a i PT^p ze stałym ograniczeniem na przepływ oraz podajemy wyniki własne zawarte w [5, 2]. Mówiąc dokładniej, wprowadzamy rozwiązania zagadnienia Riemanna $\mathcal{CRS}_R$ i $\mathcal{CRS}_S$. Następnie badamy ich zgodność, ciągłość w przestrzeni L_{loc}^1 funkcji lokalnie całkowalnych oraz zbiory niezmiennicze. Pozostała część rozdziału została poświęcona wynikowi istnienia słabego rozwiązania entropijnego zagadnienia Cauchy'ego w klasie funkcji o wahanii ograniczonym dla modelu PT^a z fazą metastabilną. Dowód głównego twierdzenia opiera się na metodzie Wave Front Tracking. Podobnie do rozważań w poprzednim rozdziale, definiujemy siatkę, definiujemy przybliżone rozwiązanie zagadnienia Riemanna $\mathcal{CRS}_R^{p,n}$. Następnie wprowadzamy malejący w czasie funkcjonał T i pokazujemy, że wahanie przybliżonego rozwiązania jest ograniczone oraz liczba fal i interakcji między nimi jest skończona w skończonym czasie. Stosując twierdzenie Helly'ego otrzymujemy istnienie zbieżnego podciągu przybliżonych rozwiązań. Na koniec udowadniamy, że funkcja graniczna jest słabym rozwiązaniem entropijnym zagadnienia Cauchy'ego dla modelu PT^a z fazą metastabilną.

Rozdział szósty został poświęcony wynikom otrzymanym w materiałach konferencyjnych [9, 4]. W obu pracach rozważaliśmy modele makroskopowe na skrzyżowaniach drogowych. Pierwszym z wprowadzonych modeli jest LWR z ruchomym ograniczeniem na przepływ. Ruchome ograniczenie na przepływ

pomaga nam modelować sytuacje, w których ciężarówka bądź inny wolniejszy pojazd redukuje przepływ w swoim otoczeniu. Z matematycznego punktu widzenia, ograniczenie jest dane przez równanie różniczkowe zwyczajne zależne od trajektorii tego pojazdu. Podajemy dokładny opis modelu dla drogi jednokierunkowej, wprowadzamy rozwiązanie zagadnienia Riemanna BRS_{LWR} oraz uogólniamy je na przypadek skrzyżowania drogowego. Drugim rozważanym rodzajem modeli jest model PT wprowadzony w rozdziale drugim. Uogólniamy go do przypadku skrzyżowania drogowego poprzez wprowadzenie odpowiedniego rozwiązania zagadnienia Riemanna.

Ostatnią część pracy, dla zachowania przejrzystości tekstu, stanowią dodatki z dowodami twierdzeń pomocniczych.

References

- [1] A. Aw and M. Rascle. Resurrection of “Second Order” Models of Traffic Flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(3):pp. 916–938, 2000.
- [2] M. Benyahia, C. Donadello, **N. Dymski**, and M. D. Rosini. An existence result for a constrained two-phase transition model with metastable phase for vehicular traffic. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 25(5):Art. 48, 42, 2018.
- [3] S. Blandin, D. Work, P. Goatin, B. Piccoli, and A. Bayen. A general phase transition model for vehicular traffic. *SIAM J. Appl. Math.*, 71(1):107–127, 2011.
- [4] E. Dal Santo, M. D. Rosini, and **N. Dymski**. The riemann problem for a general phase transition model on networks. In C. Klingenberg and M. Westdickenberg, editors, *Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems I*, pages 445–457, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [5] E. Dal Santo, M. D. Rosini, **N. Dymski**, and M. Benyahia. General phase transition models for vehicular traffic with point constraints on the flow. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pages 1–19, 2017.
- [6] P. Goatin. The Aw-Rascle vehicular traffic flow model with phase transitions. *Mathematical and computer modelling*, 44(3):287–303, 2006.

- [7] M. Lighthill and G. Whitham. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. In *Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 229, pages 317–345, 1955.
- [8] **N. Dymski**, P. Goatin, and M. D. Rosini. Existence of **BV** solutions for a non-conservative constrained Aw-Rascle-Zhang model for vehicular traffic. *J. Math. Anal. Appl.*, 467(1):45–66, 2018.
- [9] **N. Dymski**, P. Goatin, and M. D. Rosini. Modeling moving bottlenecks on road networks. preprint, Jan. 2019.
- [10] P. I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations Research*, 4(1):pp. 42–51, 1956.
- [11] H. Zhang. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(3):275–290, 2002.

10.06.2018
Dymsh