STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

ADAM GĄGOL

Niniejsza rozprawa poświęcona jest zastosowaniu metody probabilistycznej w dowodzeniu twierdzeń kombinatorycznych dotyczących unikania wzorców. Metoda probabilistyczna w kombinatoryce to szczególny sposób wykorzystania twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa pozwalający dowodzić istnienie obiektów matematycznych spełniających określone właściwości. W swej podstawowej wersji zakłada konstrukcję odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej i dowód, że losowo wybrany obiekt z tej przestrzeni z niezerowym prawdopodobieństwem posiada pożądane właściwości.

Ważnym wynikiem metody probabilistycznej jest Lokalny Lemat Lovásza pozwalający na dowodzenie istnienia struktur unikających zbioru lokalnych własności. Pośród wielu wersji lematu istnieje również wersja algorytmiczna, w której za pomocą prostego algorytmu typu Las Vegas o wielomianowym oczekiwanym czasie działania konstruowany jest obiekt unikający wszystkich nieporządanych własności lokalnych. Algorytm działa przy założeniu, że wszystkie zdarzenia A są determinowane przez skończoną liczbę niezależnych zmiennych losowych P. W ogólnej postaci algorytm przedstawia się następująco:

W pierwszym kroku algorytm przypisuje losowe wartości wszystkim zmiennym losowym $p \in P$. Następnie w głównej pętli losowo zmienia wartości zmiennych losowych składających się na zachodzące zdarzenia A aż do osiągnięcia sytuacji, w której żadne ze zdarzeń nie zachodzi.

Poza oczywistym atutem takiego podejścia, czyli bezpośredniej konstrukcji obiektów spełniających dane zależności, pozwala ono rówież na poprawienie niektórych oszacowań wynikających z niealgorytmicznych wersji lematu. Jest to możliwe dzięki skorzystaniu z relacji między zmiennymi losowymi p a unikanymi zdarzeniami A, co wymyka się klasycznej wersji lematu.

Dwa przedstawione w rozprawie wyniki dotyczące unikania wzorców w słowach (rozdział 2) oraz grafach (rozdział 3) istotnie korzystają z tej relacji oraz algorytmicznej wersji lematu.

Pierwsze twierdzenie przedstawione w rozprawie jest wynikiem samodzielnej pracy autora i dotyczy unikania wzorców (tj. takich ciągów znaków, w których poszczególne podciągi mogą zostać przypisane kolejno po sobie występującym zmiennym we wzorcu) w słowach częściowych.

Twierdzenie. *Jeśli p jest wzorcem o $m > 2$ zmiennych takim, że $|p| \geq 2^m$, to p jest $*$-unikalny nad alfabetem ternarnym.*

Pojęcie $*$-unikalności występujące w wypowiedzi twierdzenia jest naturalnym rozszerzeniem unikalności na słowa częściowe. Twierdzenie to przybliża pełną klasyfikację wzorców na takie, które są unikalne w słowach częściowych nad alfabetem binarnym, ternarnym i takie, które nie są unikalne nad żadnym skończonym alfabetem zostawiając problem otwartym jedynie dla trzech wzorców o dwóch zmiennych.

Drugim prezentowanym wynikiem jest dowód twierdzenia:

Twierdzenie. *Istnieje funkcja f taka, że jeśli T jest drzewem o szerokości ścieżkowej w to istnieje nierepetytywne kolorowanie T z list o długości $f(w)$.*

Razem z nim zaprezentowany jest przykład klasy grafów o szerokości ścieżkowej 2, dla której nie istnieje skończone k takie, że każdy z grafów z tej klasy da się pokolorować z list długości k. Twierdzenie to zostało udowodnione we współpracy z Jakubem Kozikiem, Piotrem Mickiem oraz Gwenaëlem Joretem.

20.03.2018

Adam Gągol