

## Streszczenie pracy doktorskiej

**"Twierdzenia o punktach stałych i miary niezwartości w przestrzeniach Banacha i Fréchet'a oraz ich zastosowania do nieliniowych równań całkowych".**

Autor: mgr Szymon Dudek

Promotor: dr hab. Leszek Olszowy, prof. PRz

Głównym celem niniejszej pracy doktorskiej jest zaprezentowanie nowych twierdzeń o punkcie stałym w przestrzeniach Banacha i przestrzeniach Fréchet'a oraz ich zastosowań w kierunku badania istnienia, a czasami także charakteru rozwiązań nieliniowych równań całkowych. Ponadto zwracamy uwagę na to w jaki sposób prezentowane twierdzenia o punkcie stałym uogólniają znane wcześniej wyniki oraz jakie korzyści płyną z ich zastosowania do równań całkowych.

Pierwszy rozdział zawiera podstawowe definicje i własności. Ustalona zostaje także niezbędna terminologia i oznaczenia.

W rozdziale drugim omawiamy pojęcie miary niezwartości. Przypominamy przykłady klasycznych miar niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa. Po omówieniu głównych własności tych miar przedstawiamy aksjomatyczne definicje miar niezwartości w przestrzeniach Banacha i przestrzeniach Fréchet'a. Rozdział kończymy podając przykłady miar niezwartości oraz słabych miar niezwartości w konkretnych funkcyjnych przestrzeniach Banacha i Fréchet'a wraz z ich wybranymi własnościami. Przedstawione miary niezwartości pozwalają nam, w dalszych rozdziałach, wykazywać rozwiązalność wybranych równań całkowych, a czasem także badać pewne własności tych rozwiązań (np. asymptotyczną stabilność, krańcową monotoniczność itp.)

W rozdziale trzecim przedstawiamy tzw. warunek  $(m)$ , istotny w dalszych rozważaniach, w kilku funkcyjnych algebrach Banacha i Fréchet'a. Okazuje się, że miara niezwartości Kuratowskiego określona na algebrze Banacha spełnia ten warunek, czego dowód pochodzi z pracy [2]. Gdy mówimy o algebrze funkcji ciągłych na przedziale zwartym, czy na  $\mathbb{R}_+$ , przez iloczyn dwóch wektorów rozumiemy zwykły iloczyn dwóch funkcji. Wówczas w warunku  $(m)$  występują miary niezwartości przedstawione w rozdziale drugim. Jeżeli zaś chodzi o algebrę funkcji bezwzględnie całkowalnych, czy lokalnie bezwzględnie całkowalnych na półprostej z przedstawionymi wcześniej słabymi miarami niezwartości, to używamy iloczynu w formie splotu.

Rozdział czwarty zawiera twierdzenia o punkcie stałym dla operatorów określonych w algebrach Banacha oraz w algebrach Fréchet'a. W ich dowodach korzysta się z twierdzeń typu Darbo jednakże wykorzystuje się także warunek  $(m)$  będący własnością charakterystyczną dla algebr. Przedstawiamy również przykłady zastosowań tych twierdzeń

do dowodzenia istnienia rozwiązań wybranych nieliniowych równań całkowych określonych w pewnych funkcyjnych algebrach Banacha i algebrach Frécheta. W równaniach tych występują iloczyny operatorów całkowych typu Volterra, Volterra-Hammersteina, czy operatorów całkowych typu ułamkowego. W niektórych przypadkach oprócz problemu istnienia rozwiązania skupiamy się także na jego charakterze, co wiąże się ściśle z wykorzystywanymi w tym celu miarami niezwartości.

Rozdział piąty poświęcony jest nowym twierdzeniom o punktach stałych typu Darbo w przestrzeniach Frécheta. Omawiamy w jaki sposób te twierdzenia uogólniają klasyczne twierdzenie Darbo. Okazuje się bowiem, że możemy osłabić założenia dotyczące operatora  $T$ . Wystarczy mianowicie, że warunek Darbo będzie spełniony tylko przez pewne iteracje domkniętych i wypukłych otoczek obrazów operatora  $T$ . Sam zaś operator nie musi go spełniać. Prezentujemy ponadto na przykładzie pewnego równania całkowego efektywność tych twierdzeń pozwalającą odrzucić część założeń wymaganych przy stosowaniu twierdzeń we wcześniejszych (słabszych) wersjach. Rozważania te pochodzą z prac [2] i [5].

W rozdziale szóstym prezentujemy uogólnienie twierdzenia Sadovskii'ego w przestrzeniach Frécheta. W drugiej części tego rozdziału przypominamy pojęcia odwzorowania  $\mu$ -quasi-kondensującego oraz  $\mu$ -FPP wraz z odpowiedzią na pewien otwarty problem związany z tymi pojęciami.

Ostatni rozdział dotyczy ciągłej zależności zbioru rozwiązań pewnego kwadratowego równania Volterra od zmieniającego się parametru. Rozpatrujemy to równanie zarówno w przestrzeni  $C([0, T])$  jak i  $C(\mathbb{R}_+)$ . W trakcie rozważań nie zakładamy jednoznaczności rozwiązania badanego równania, więc zmienność zbioru rozwiązań jest wyrażana przy pomocy pseudometryki Hausdorffa.

Zawarte w rozprawie doktorskiej wyniki opierają się głównie na pracach [1] - [5].

## Bibliografia

- [1] J. BANAŚ, S. DUDEK, *The technique of measures of noncompactness in Banach algebras and its applications to integral equations*, Abstr. Appl. Anal. 2013, Article ID 537897 (2013).
- [2] S. DUDEK, *Fixed point theorems in Fréchet algebras and Fréchet spaces and applications to nonlinear integral equations*, Appl. Anal. Discrete Math. 11 (2017) 340–357.
- [3] S. DUDEK, *Measures of Noncompactness in a Banach Algebra and Their Applications*, J. Math. Appl. 40 (2017), 69–84.
- [4] S. DUDEK, L. OLSZOWY, *Continuous dependence of the solutions of nonlinear integral quadratic Volterra equation on the parameter*, Journal of Function Spaces, 2015, Article ID 471235.
- [5] S. DUDEK, L. OLSZOWY, *On generalization of Darbo-Sadovskii's type fixed point theorems for iterated mappings in Fréchet spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. (w recenzji).

Szymon Dudek