

Kraków, 10 sierpnia 2018

Dariusz Cichoń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

**Recenzja rozprawy doktorskiej Szymona Dudka pod tytułem
*Twierdzenia o punktach stałych i miary niezwartości w
przestrzeniach Banacha i Fréchet'a oraz ich zastosowania do
nieliniowych równań całkowych***

Wprowadzone przez Kuratowskiego w 1930 roku pojęcie miary niezwartości zyskało na wadze, kiedy w 1955 roku Darbo opublikował swoje twierdzenie o punkcie stałym dla odwzorowań działających kontraktywnie względem tej miary. Kolejnym milowym krokiem w teorii miar niezwartości było sformułowanie aksjomatycznej definicji miary niezwartości przez Banacha i Goebela w 1980 roku wraz z naturalnym uogólnieniem twierdzenia Darbo. Jeszcze dalszym i ważnym wkładem w tę teorię było przeniesienie pojęcia miar niezwartości na przypadek przestrzeni Fréchet'a, co jest wynikiem Olszowego z roku 2012. Innym uogólnieniem twierdzenia Darbo jest twierdzenie Sadovskiego z roku 1967, w którym mocny warunek kontrakcyjności z twierdzenia Darbo został zastąpiony przez silną nierówność bez czynnika silnie mniejszego od 1. Jak dobrze wiedzą wszyscy matematycy, twierdzenia o punkcie stałym na podzbiorach przestrzeni funkcyjnych są doskonałym narzędziem do badania istnienia rozwiązań równań funkcyjnych, a w omawianej przeze mnie pracy są to między innymi nieliniowe równania całkowe typu Volterra, Volterra-Hammersteina i równania całkowe ułamkowe — na różnych przestrzeniach, a do tego w wersji „kwadratowej”, gdzie po prawej stronie występuje iloczyn dwóch wyrażeń z równań odpowiednich typów. To ostatnie podejście wymagało kolejnego uogólnienia teorii miar niezwartości dla algebr Banacha i Fréchet'a z wykorzystaniem warunku (m), który został wprowadzony w pracy Banacha i Olszowego w roku 2009. Po tym przeglądzie wyników dotyczących miar niezwartości, twierdzeń o punktach stałych i ich zastosowań w teorii równań funkcyjnych można bez wahania stwierdzić, że wyniki pana Szymona Dudka pozostają w nurcie aktualnych badań naukowych.

Przejdę teraz do omówienia zawartości pracy. Po krótkim rozdziale pierwszym, poświęconym pojęciom wstępnym, przechodzimy do rozdziału drugiego, gdzie autor definiuje miary niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa (choć nie Hausdorff był jej autorem), a następnie miary niezwartości w ujęciu aksjomatycznym określone na rodzinie wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni Banacha i jej analogon dla przestrzeni Fréchet'a, który nie jest już pojedynczą funkcją, lecz rodziną funkcji spełniających zadane warunki. Następnie autor określa miarę niezwartości na algebrze Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$ funkcji ciągłych i ograniczonych na półprostej, na algebrze Fréchet'a $C(\mathbb{R}_+)$ funkcji ciągłych na półprostej oraz na algebrze Fréchet'a $C(\mathbb{R}_+, E)$ funkcji ciągłych na półprostej o wartościach w algebrze Banacha E . W trakcie omawiania tych pojęć autor formułuje kryterium relatywnej zwartości zbioru — szkoda, że bez podania źródła. Miara niezwartości w przypadku $C(\mathbb{R}_+, E)$ różni się od przypadku $C(\mathbb{R}_+)$ jednym dodatkowym składnikiem, którego niezbędność została przez autora uzasadniona prostym, ale pomysłowym

przykładem. Oprócz tego wprowadzone zostały miary niezwartości na algebrach splotowych $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ (Frécheta) oraz $L^1(\mathbb{R}_+)$ (Banacha).

W rozdziale trzecim zapoznajemy się z warunkiem (m) w algebrze Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$, w algebrach Frécheta $C(\mathbb{R}_+, E)$ i $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ oraz w algebrze splotowej $L^1(\mathbb{R}_+)$. Ciekawą własnością miary niezwartości na $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ jest to, że spełnia ona warunek (m) ze stałą $\frac{1}{2}$ w miejsce 1. Jest to rozdział o charakterze przygotowawczym do rozważań w następnych rozdziałach, niemniej wymagał od autora przeprowadzenia niejednego subtelnego oszacowania.

Tematem kolejnego, czwartego rozdziału są zastosowania twierdzeń o punktach stałych do równań całkowych. Autor przytacza trzy twierdzenia wykazane wcześniej przez innych autorów i dowodzi czwartego, w którym warunek (m) występuje w wersji dla algebr Frécheta. Jak można zauważyć, warunek (m) służy temu, aby można było rozważać równania, gdzie po prawej stronie występują iloczyny dwóch nieliniowych operatorów, a nie pojedynczy operator. Omówione zostają kolejno nieliniowe kwadratowe równanie Volterry w algebrze $C(\mathbb{R}_+, E)$, kwadratowe iloczynowe równanie całkowego typu Volterry-Hammersteina w algebrze Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$ oraz kwadratowe ułamkowe równanie całkowe w tej samej algebrze. Każde z tych twierdzeń wymaga dość obszernych założeń, z których wiele ma charakter dość ogólny. Wśród założeń tych pojawiają się jednak takie o budzącym niepokój charakterze, gdzie zakłada się, że istnieje stała spełniająca skomplikowane warunki nierównościowe (B_7) oraz (C_6) . W przypadku drugiego z nich autor na przykładzie (Przykład 4.14) wykazał, że nie jest to warunek pusto spełniony, choć pierwszy pozostał bez takiego zapewnienia. Można odnieść wrażenie, że powtarzające się w tym rozdziale serie założeń są dobrane „na siłę”, ale jednak należy przyznać, że ich sformułowanie wymagało sporej inwencji, bo podane twierdzenia o istnieniu i charakterze rozwiązań nie są ich prostymi konsekwencjami, a wręcz przeciwnie — wymagają niebanalnych dowodów pełnych technicznych rachunków i oszacowań.

W rozdziale piątym autor formułuje trzy uogólnienia twierdzenia o punkcie stałym dla algebr Frécheta, w których zasadnicze założenie o kontrakcyjności względem miary niezwartości jest zmodyfikowane w taki sposób, że zamiast zwykłego obrazu zbioru rozważamy obraz potęgi operatora z uwzględnieniem domkniętych otoczek wypukłych. Dowód tych twierdzeń oparty jest na twierdzeniu Schaudera-Tichonowa, które jest daleko idącym uogólnieniem twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Pierwsze z tych twierdzeń (Twierdzenie 5.2) znajduje w dalszej części rozdziału zastosowanie dla równania funkcyjnego z iloczynem dwóch nieliniowych operatorów typu Volterry po prawej stronie (które, w myśl Uwagi 5.10, nie jest objęte wcześniejszym Twierdzeniem 4.3). Pozostałe dwa twierdzenia (Twierdzenie 5.6 i Twierdzenie 5.7) mają w swoich założeniach jeszcze dalej idącą modyfikację nierówności dla miar niezwartości, bowiem obie strony nierówności są obłożone funkcjami specjalnego typu. Ciekawe byłoby zobaczyć, czy można te uogólnienia zastosować w jakiejś sytuacji nieobjętej przez Twierdzenie 5.2, ale autor akurat tym zagadnieniem się nie zajął. W sformułowaniu warunku (D_3) potrzebnego w Twierdzeniu 5.9 autor powinien dopisać założenie, że funkcja r jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym półprostą.

Rozdział szósty jest z kolei poświęcony uogólnieniom twierdzenia Sadovskiego o punkcie stałym, jeśli uwierzymy tytułowi, ale zawiera on tylko jedno uogólnienie i krótką wzmiankę o własności μ -FPP. Wspomniane uogólnienie ma charakter podobny do twierdzeń z poprzedniego rozdziału, w których występują iteracje odwzorowania. Autor nieco utrudnił czytanie dowodu tego twierdzenia, bo na samym początku użył litery C mając na myśli zbiór Ω wymieniony w założeniach twierdzenia. Jeśli natomiast chodzi o własność μ -FPP, to autorowi wspólnie z L. Olszowym udało się wykazać, że pociąga ona refleksywność przestrzeni Banacha, na której rozważamy miary niezwartości, a nawet jest jej równoważna w świetle wcześniejszych wyników.

Ostatni rozdział, najciekawszy w mojej opinii, dotyczy ciągłej zależności zbioru rozwiązań nieliniowego równania całkowego typu Volterry od parametru. Tę ciągłość rozumie się w sensie metryki Hausdorffa dla niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni metrycznej. W Lemacie 7.2 autor podaje charakterystykę ciągłości w przypadku, kiedy ta przestrzeń to $C(\mathbb{R}_+)$, zbiór wszystkich funkcji ciągłych na półprostej. Autor skupił się następnie na nieliniowym równaniu Volterry, którego badanie nie jest całkiem nowym pomysłem, ale autor rozważa je jako równanie funkcyjne na przestrzeni Frécheta $C(\mathbb{R}_+)$ i na tym polega jego oryginalny wkład w tę teorię. W Twierdzeniach 7.4 i 7.6 podane są (jak zwykle rozbudowane) warunki gwarantujące istnienie rozwiązań w przestrzeniach $C([0, T])$ i $C(\mathbb{R}_+)$, a następnie sformułowane są „parametryczne” wersje tych warunków. Na podstawie bardzo ładnego Przykładu 7.8 autor zauważa, że te wersje warunków są zbyt słabe, aby zagwarantować ciągłą zależność od parametru. Wchodząc w szczegóły należy zauważyć, że nie jest prawdą, że $\text{Fix}(0)$, zbiór punktów stałych rozpatrywanego równania z parametrem $\lambda = 0$, składa się z dwóch rozwiązań, bowiem jest w nim nieskończenie wiele rozwiązań postaci:

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \alpha], \\ \frac{1}{4}(t - \alpha)^2, & t \in (\alpha, 1], \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1].$$

To jednak nie stanowi wielkiej przeszkody, bo ważną obserwacją jest to, że funkcja zerowa jest w $\text{Fix}(0)$, co daje pożądaną efekt braku ciągłej zależności od parametru. Po dołożeniu nowego warunku (F_5) udaje się autorowi wykazać ciągłą zależność w przypadku przestrzeni $C([0, T])$, która w całkiem podobny sposób może być wykazana dla przestrzeni $C(\mathbb{R}_+)$. W pomysłowym dowodzie wykorzystuje się funkcję ψ_{λ_2} , która jest rozwiązaniem pewnego równania całkowego. Nie jest dla mnie jasne, czy funkcja ψ_{λ_2} jest rzeczywiście jedynym rozwiązaniem tego równania, jak sugeruje autor, ale to jest w istocie bez znaczenia, bo w dowodzie wykorzystuje się tylko fakt, że jest ona rozwiązaniem. W wartościowym Przykładzie 7.11 pokazano nam, jak można zastosować Twierdzenie 7.9 o ciągłej zależności od parametru.

Przejdę teraz do oceny pracy. Nie ulega moim zdaniem wątpliwości, że oryginalny wkład autora w tematykę miar niezwartości i ich zastosowań jest interesujący i istotny, co nie jest osiągnięciem łatwym, skoro wydawać by się mogło, że jest to dziedzina matematycznie wyeksploatowana. Wśród wyników zamieszczonych w pracy są te o charakterze twierdzeń ogólnych, jak i zastosowań, co świadczy o wszechstronności dokonań autora. Można mieć pewien niedosyt, jeśli idzie o przykłady ilustrujące możliwość zastosowania niektórych twierdzeń, zwłaszcza tych z rozdziału piątego. Z pewnością na wyróżnienie zasługuje strona redakcyjna pracy, a w szczególności to, że autor umiejętnie ułatwia czytelnikowi śledzenie rozumowań

odwołując się do wcześniej formułowanych założeń i wykazywanych własności (choć zdarzają się i tzw. „głębsze” przejścia). Również strona językowa pracy wywiera pozytywne wrażenie, co wcale nie jest takie częste w obecnych czasach.

Poniżej przedstawię parę drobniejszych uwag, które nie mają większego znaczenia, jeśli chodzi o pozytywną ocenę pracy.

- (1) W linii 13₉ powinno być „ t_0 ” zamiast „ t_1 ”.
- (2) W liniach 22₉ i 27^{14,15} powinno być „ $\leq$ ” zamiast „ $=$ ”.
- (3) Na stronie 29 w warunku (B_1) powinno być $d_\infty(p_i)$.
- (4) W linii 41₃ powinno być $G_2 < 0.77$ (choć prawdą jest, że $G_2 < 0.08$, co jednak jest bez znaczenia).
- (5) Niepolski cudzysłów w linii 43₇.
- (6) W linii 45⁹ ma być C_{I_i} zamiast Y_{I_i} .
- (7) W liniach 45¹³ i 47⁷ pierwsza równość powinna być zastąpiona nierównością „ $<$ ” (to wystarczy).
- (8) Konflikt oznaczeń na stronie 49, T jest operatorem i liczbą.
- (9) W linii 49₇ nie chodzi o „lokalną jednakową ciągłość”, lecz o ciągłość jednostajną.

Konkluzja. Zgodnie z moją wyrażoną powyżej opinią praca doktorska pana Szymona Dudka pt. *Twierdzenia o punktach stałych i miary niezwartości w przestrzeniach Banacha i Fréchéta oraz ich zastosowania do nieliniowych równań całkowych* spełnia ustawowe wymagania dotyczące stopnia naukowego doktora i może stanowić podstawę do nadania panu Szymonowi Dudkowi stopnia naukowego doktora.

Dariusz Cichoń

Dariusz Cichoń