

Dr hab. Aldona Dutkiewicz

Poznań, 16 sierpnia 2018 r.

Wydział Matematyki i Informatyki

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

Recenzja rozprawy doktorskiej

mgra Szymona Dudka

pt. *Twierdzenia o punktach stałych i miary niezwartości
w przestrzeniach Banacha i Fréchéta oraz ich zastosowania
do nieliniowych równań całkowych*

Rozwój teorii punktu stałego od samego początku był związany z licznymi jej zastosowaniami w różnych działach matematyki, a także takich naukach jak ekonomia, teoria gier, czy informatyka teoretyczna. Przede wszystkim jednak twierdzenia o punktach stałych stanowią szczególnie użyteczne narzędzie do badania istnienia lub istnienia i jedności rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych i całkowych. Dynamiczny rozwój teorii punktu stałego nastąpił w drugiej połowie XX wieku i związany był z badaniami dotyczącymi m.in. odwzorowań nierozszerzających, odwzorowań α -zgęszczających oraz ich uogólnień. Wiązało się to z wykorzystaniem przez G. Darbo w 1955 roku pojęcia miary niezwartości do uogólnienia twierdzenia Schaudera o punkcie stałym. Odtąd miary niezwartości stały się bardzo przydatnym i naturalnym narzędziem stosowanym w celu uzyskania twierdzeń o punkcie stałym dla szerszych, niż pełnociągłe lub zwarte, klas odwzorowań. To właśnie twierdzenia typu Darbo, Sadowskiego i inne, w których nie ma założeń o zwartości (lub pełnociągłości) odwzorowania, lecz „zwartość” odzwierciedlona jest poprzez odpowiednio rozumiane zwężenie względem stosownie wybranej miary niezwartości, są bardzo przydatne, np. w teorii egzystencjalnej dla różnego typu równań, w szczególności także całkowych.

Obok znanych miar niezwartości, pochodzących od Kuratowskiego, Hausdorffa i innych, definiuje się i rozważa dodatkowo miary niezwartości w konkretnych przestrzeniach, które służą określonym celom. Aby pokonać pewne trudności związane z brakiem możliwości podania formuł *explicite* wyrażających te miary, zaproponowano podejście aksjomatyczne. Pierwszym, który wprowadził taką definicję był B. N. Sadowski. Jednak jedną z najważniejszych jest aksjomatyka podana przez J. Banasia i K. Goebela, dopuszczająca wiele naturalnych realizacji, dzięki którym można otrzymać różne klasyczne miary niezwartości.

Głównym celem recenzowanej rozprawy doktorskiej jest udowodnienie nowych twierdzeń o punktach stałych typu Darbo i Sadowskiego w przestrzeniach i algebrach Banacha oraz Frécheta, a także zaprezentowanie zastosowań uzyskanych wyników w teorii nieliniowych równań całkowych, również w badaniu charakteru ich rozwiązań. W szczególności Autor rozprawy rozpatruje nieliniowe kwadratowe równania całkowe typu Volterry, Volterry-Hammersteina oraz typu ułamkowego. Ponadto w pewnych przypadkach rozważane są równania całkowe, w których po prawej stronie równania występuje iloczyn operatorów całkowych wspomnianego typu, dlatego też niektóre rozważania zostały przeprowadzone w funkcyjnych algebrach Banacha lub algebrach Frécheta.

Przedstawiona do recenzji praca zawiera uporządkowany, ujednolicony i rozszerzony materiał pochodzący głównie z pięciu prac Autora, w tym dwóch wspólnych z Promotorem rozprawy i jednej wspólnej z J. Banasiem.

Omówię teraz bardziej szczegółowo tematykę pracy oraz uzyskane w niej wyniki. Praca Pana mgra Szymona Dudka podzielona jest na siedem rozdziałów. W rozdziale I wprowadzone zostały oznaczenia i podstawowe pojęcia stosowane w dalszej części pracy.

Rozdział II ma charakter pomocniczy i zawiera, poza niezbędnymi w dalszych rozważaniach rozprawy lematami i twierdzeniami, przykłady klasycznych miar niezwartości Kuratowskiego oraz Hausdorffa wraz z ich własnościami. Ponadto Autor przedstawia aksjomatyczne definicje miar niezwartości w przestrzeniach Banacha i przestrzeniach Frécheta oraz przykłady innych miar niezwartości, skupiając się głównie na wynikach wykorzystywanych w rozprawie. Dotyczy to np.

funkcji rzeczywistej μ_d , zdefiniowanej na $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ w następujący sposób

$$\mu_d(X) := \omega_0^\infty(X) + d_\infty(X) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam } X(t),$$

która jest miarą niezwartości w algebrze Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$, a została wprowadzona we wspólnej pracy Autora z J. Banasiem ([9]; numeracja z bibliografii rozprawy doktorskiej). Jądro tej miary składa się ze wszystkich zbiorów $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ takich, że wszystkie funkcje należące do X są lokalnie jednakoowo ciągle na $\mathbb{R}_+$ i krańcowo niemalejące na $\mathbb{R}_+$, a ponadto grubość wiązki $X(t)$ utworzonej przez funkcje ze zbioru X dąży do zera w nieskończoności. Tak zdefiniowana miara niezwartości pozwala na badanie asymptotycznej stabilności rozwiązań odpowiedniego równania operatorowego.

Natomiast w rozdziale III Autor podaje definicję warunku (m) dla algebr Banacha, który został wprowadzony w pracy [14] z 2009 roku przez J. Banasia i Promotora recenzowanej rozprawy. Definicja ta stanowi, iż miara niezwartości μ określona na algebrze Banacha E spełnia warunek (m) , jeżeli dla dowolnych zbiorów $X, Y \in \mathfrak{M}_E$ zachodzi następująca nierówność

$$\mu(XY) \leq \|X\|\mu(Y) + \|Y\|\mu(X).$$

Z kolei Doktorant w pracy [29] przeniósł to pojęcie na przypadek algebr Frécheta. Różne postacie warunku (m) w pewnych funkcyjnych algebrach Banacha oraz algebrach Frécheta dla przedstawionych w poprzednim rozdziale miar niezwartości stały się bardzo użytecznym narzędziem w zastosowaniach tychże miar niezwartości — co zostało zaprezentowane w następnym rozdziale rozprawy.

Rozdział IV jest najbardziej obszernym rozdziałem recenzowanej pracy. Poświęcony jest on twierdzeniom o punkcie stałym dla operatorów określonych w algebrach Banacha oraz algebrach Frécheta. Twierdzenia 4.5 oraz 4.7 (w szczególności ich dowody) potwierdzają znaczenie warunku (m) i w kolejnych podrozdziałach pracy zostały zaprezentowane przykłady ich zastosowania w dowodzeniu twierdzeń egzystencjalnych dla równań całkowych w pewnych funkcyjnych algebrach Banacha lub algebrach Frécheta. I tak, w poszczególnych podrozdziałach udowodnione zostały:

- twierdzenie egzystencjalne dla nieliniowego kwadratowego równania całko-

wego Volterry

$$x(t) = g(t) + f(t, x(t)) \cdot \int_0^t v(t, s, x(s)) ds \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

w algebrze Frécheta $C(\mathbb{R}_+, E)$;

- twierdzenie o istnieniu i charakterze rozwiązań kwadratowego iloczynowego równania całkowego postaci

$$x(t) = (V_1 x)(t)(V_2 x)(t), \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

gdzie V_i są tak zwanymi kwadratowymi operatorami całkowymi Volterry-Hammersteina zdefiniowanymi następująco

$$(V_i x)(t) := p_i(t) + f_i(t, x(t)) \int_0^t g_i(t, s) h_i(s, x(s)) ds \quad (t \in \mathbb{R}_+; i = 1, 2)$$

i rozpatrywanymi w algebrze Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$;

- twierdzenie o istnieniu i charakterze rozwiązań kwadratowego ułamkowego równania całkowego

$$x(t) = (U_1 x)(t)(U_2 x)(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

gdzie

$$(U_i x)(t) := m_i(t) + f_i(t, x(t)) \int_0^t \frac{v_i(t, s, x(s))}{(t-s)^{\alpha_i}} ds$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $i = 1, 2$, rozpatrywanego w algebrze Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$.

W ramach badania charakteru rozwiązań powyższych równań wykazano, że te rozwiązania są nieujemne, asymptotycznie stabilne w zadanym zbiorze oraz krańcowo niemalejące. Ostatnie twierdzenie zostało zilustrowane odpowiednio dobranym przykładem.

Na szczególną uwagę zasługują twierdzenia 4.12 oraz 4.13, których dowody wymagały licznych rozbudowanych oszacowań oraz pokonania pewnych trudności technicznych.

O ile w rozdziale IV przedstawione zostały twierdzenia o punkcie stałym dla operatorów określonych w algebrach Banacha oraz algebrach Frécheta nawiązujące do twierdzeń typu Darbo, ale wykorzystujące także warunek (m) charakterystyczny dla algebr, to w następnym rozdziale pracy, rozdziale V, Pan Dudek

formułuje twierdzenia uogólniające twierdzenie Darbo o punkcie stałym dla przestrzeni Fréchet. Rozważania te zostały zainspirowane pracą Liu, Guo, Wu, Wu z 2005 roku opublikowanej w *J. Math. Anal. Appl.* W tym celu zdefiniowany został w sposób rekurencyjny pewien ciąg superpozycji operatora T . Jak się okazuje, a co zostało wykorzystane w rozważaniach tego rozdziału, jeżeli operator generowany przez równanie całkowe nie spełnia założeń twierdzenia Darbo o punkcie stałym, to może się zdarzyć, że „ n -te złożenie” tego operatora wraz z operacją domkniętej otoczki wypukłej już je spełnia. Takie osłabienie założeń twierdzeń typu Darbo umożliwiło zmniejszenie ilości założeń twierdzeń egzystencyalnych dla równań całkowych, w których znajdują one zastosowanie. Zostało to zaprezentowane na przykładzie równania całkowego rozważanego w algebrze Fréchet $C(\mathbb{R}_+, E)$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w pewnej algebrze Banacha E . Uściślając, w podrozdziale 5.2 Autor przedstawił zastosowanie twierdzenia 5.2 rozpatrując równanie całkowe z iloczynem dwóch operatorów całkowych typu Volterry postaci:

$$x(t) = \int_0^t v_1(t, s, x(s)) ds \cdot \int_0^t v_2(t, s, x(s)) ds \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

dla którego wykazał istnienie rozwiązania $x = x(t)$ w algebrze Fréchet $C(\mathbb{R}_+, E)$, gdzie E jest algebrą Banacha.

Kolejny, VI rozdział rozprawy doktorskiej poświęcony jest pewnemu uogólnieniu twierdzenia Sadowskiego dla przestrzeni Fréchet. Jego założenie w postaci, charakterystycznej dla twierdzeń typu Sadowskiego, nierówności ma również podobną iteracyjną postać, jak to miało miejsce w przypadku rozważanych w poprzednim rozdziale twierdzeń typu Darbo. W drugiej części tego rozdziału Autor przypomina pojęcia odwzorowania μ -quasi-kondensującego oraz μ -własności punktu stałego pewnej przestrzeni Banacha E . Pojęcia te wprowadzili D. Ariza-Ruiz i J. Garcia-Falset w pracy opublikowanej w *Fixed Point Theory*. W pracy tej autorzy postawili również pewien problem. Ten problem został rozwiązany przez Autora rozprawy i Promotora w wysłanej do druku pracy do *J. Fixed Point Theory Appl.* Dotyczy on równoważności posiadania przez przestrzeń Banacha μ -własności punktu stałego i jej refleksywności.

Wreszcie ostatni, VII rozdział rozprawy doktorskiej poświęcony jest sformułowaniu założeń, które zagwarantują, że zbiór rozwiązań nieliniowego równania

całkowego typu Volterry

$$x(t) = a(\lambda, t) + f(\lambda, t, x(t)) \int_0^t v(\lambda, t, s, x(s)) ds \quad (t \in J),$$

gdzie λ jest elementem przestrzeni metrycznej (M, d) , a $J = [0, T]$ lub $J = \mathbb{R}_+$, w przestrzeni $C(J)$ zależy w sposób ciągły (ze względu na odległość Hausdorffa $D_{C(J)}$) od parametru λ . Jak wykazał Autor rozprawy i zilustrował odpowiednio dobranym przykładem, założenia wystarczające do istnienia rozwiązania nie gwarantują tego, by zbiór rozwiązań zmieniał się w sposób ciągły względem parametru.

Na końcu rozprawy Autor przytacza obszerną i wyczerpującą bibliografię związaną z rozważaniami prowadzonymi w pracy, zawierającą 58 pozycji.

Recenzowana rozprawa zawiera szereg nowych, wartościowych rezultatów z teorii równań całkowych w przestrzeniach i algebrach Banacha oraz w przestrzeniach i algebrach Fréchet'a. Ich uzyskanie świadczy o perfekcyjnym opanowaniu warsztatu badawczego przez Doktoranta oraz o bardzo dobrej orientacji w zakresie tematyki pracy. Dowody twierdzeń zawierających te wyniki wymagały pokonania szeregu trudności i użycia zaawansowanych metod teorii równań całkowych oraz nieliniowej analizy funkcjonalnej, jak również przeprowadzenia dość skomplikowanych rachunków i uzyskania wielu wyrafinowanych oszacowań. Otrzymane w rozprawie doktorskiej wyniki są z pewnością oryginalne. Wiele z nich zostało już opublikowanych, a niektóre, jak wynika z bibliografii, czekają na publikację. Styl prezentacji jest jasny i klarowny, a ilość „literówek” znikoma, choć kilka z nich dostrzegłam.

Podsumowując, na podstawie zawartych powyżej stwierdzeń, **uwzględniłam, że rozprawa doktorska Pana mgr'a Szymona Dudka spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim w art. 13 ust. 1 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dn. 14 marca 2003 r. (Dz.U. Nr 65, poz. 595, z późniejszymi zmianami) i wnoszę o dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Aldona Dutkiewicz