

AUTOREFERAT

ŁUKASZ PIASECKI

SPIS TREŚCI

Informacje o autorze	2
Najnowsze osiągnięcia w teorii przestrzeni Lindenstraussa	3
1. Wstęp	3
2. Hiperpłaszczyzny w przestrzeni c i predualne ℓ_1	4
3. Słaba* własność punktu stałego w ℓ_1	6
4. Polyhedralność dla przestrzeni Lindenstraussa	11
5. Stabilność słabej* własności punktu stałego w ℓ_1	14
6. Geometryczne równoważniki własności polyhedralnych dla ℓ_1 -predualnych	19
7. O ℓ_1 -predualnych odległych o 1	22
8. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych	25
Artykuły opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora	25
Artykuły oraz książka opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora	25
Literatura	31

INFORMACJE O AUTORZE

1. Imię i nazwisko: Łukasz Piasecki

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- Doktor nauk matematycznych
tytuł rozprawy doktorskiej: Przekształcenia średnio-lipschitzowskie
promotor: prof. dr hab. Kazimierz Goebel
recenzenci: prof. dr hab. Piotr Biler i prof. dr hab. Stanisław Prus
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 2012.
Moja rozprawa doktorska została uznana za wyróżniającą się. Jej rozszerzona wersja została opublikowana przez wydawnictwo CRC Press w formie książki zatytułowanej *Classification of Lipschitz Mappings*, za którą przyznano mi nagrodę Rektora Uniwersytetu Marii Curie Skłodowskiej w Lublinie (nagroda I stopnia).
- Studia doktoranckie z matematyki,
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS, 2007–2011.
- Magister matematyki
tytuł pracy magisterskiej: O retrakcjach kul na sfery
promotor: prof. dr hab. Kazimierz Goebel
recenzent: prof. dr hab. Stanisław Prus
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 2007.
Moja praca magisterska została nagrodzona w dorocznym konkursie PTM imienia Józefa Marcinkiewicza na najlepszą pracę studencką z dowolnej dziedziny matematyki (druga nagroda). Wyniki w niej zawarłem opublikowałem w czasopiśmie *Topological Methods in Nonlinear Analysis* oraz *Nonlinear Analysis*.
- Studia magisterskie z matematyki,
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS, 2002–2007.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin,
asystent od 2008 do 2013,
adiunkt od 2013 roku.
- Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski,
adiunkt naukowy od 1 lipca 2013 do 30 czerwca 2014 roku.
- Università Cattolica del Sacro Cuore, Mediolan, Włochy,
profesor wizytujący od 19 października do 16 listopada 2017 roku.
- Università Cattolica del Sacro Cuore, Mediolan, Włochy,
profesor wizytujący od 20 października do 17 listopada 2016 roku.
- Università Cattolica del Sacro Cuore, Mediolan, Włochy,
profesor wizytujący od 20 października do 22 listopada 2015 roku.

Moje główne osiągnięcie naukowe (w rozumieniu art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki) to jednotematyczny cykl sześciu publikacji habilitacyjnych pod tytułem

NAJNOWSZE OSIĄGNIĘCIA W TEORII PRZESTRZENI LINDENSTRAUSSA

- [CMP2015] E. CASINI, E. MIGLIERINA, AND Ł. PIASECKI, *Hyperplanes in the space of convergent sequences and preduals of ℓ_1* , Canad. Math. Bull. 58 (2015) 459-470.
- [CMP2017] E. CASINI, E. MIGLIERINA, AND Ł. PIASECKI, *Separable Lindenstrauss spaces whose duals lack the weak* fixed point property for nonexpansive mappings*, Studia Math. 238 (1) (2017), 1-16.
- [CMPV2016] E. CASINI, E. MIGLIERINA, Ł. PIASECKI, AND L. VESELÝ, *Rethinking polyhedrality for Lindenstrauss spaces*, Israel J. Math. 216 (2016), 355-369.
- [CMPP2018] E. CASINI, E. MIGLIERINA, Ł. PIASECKI, AND R. POPESCU, *Weak* fixed point property in ℓ_1 and polyhedrality in Lindenstrauss spaces*, Studia Math. 241 (2) (2018), 159-172.
- [CMPP2017] E. CASINI, E. MIGLIERINA, Ł. PIASECKI, AND R. POPESCU, *Stability constants for the weak* fixed point property in ℓ_1* , J. Math. Anal. Appl. 452 (1) (2017), 673-684.
- [P2018] Ł. PIASECKI, *On Banach space properties that are not invariant under the Banach-Mazur distance 1*, J. Math. Anal. Appl. 467 (2018), 1129-1147.

1. WSTĘP

It is a matter of general agreement that the $L_p(\mu)$ spaces ($1 \leq p \leq \infty$ and μ a measure) and the $C(K)$ spaces (K compact Hausdorff) are among the most important Banach spaces. A central part of Banach space theory is devoted to the investigation of the special properties of these spaces and some closely related spaces. This part of Banach space theory is often called the theory of the classical Banach spaces. It is our feeling that in order to get a well rounded theory of the classical Banach spaces, in the framework of the isometric theory, it is worthwhile to take as the main objects of the investigation the class of Banach spaces X for which $X^ = L_p(\mu)$ for some $1 \leq p \leq \infty$ and some measure μ . Let us examine briefly the relation of this latter class of spaces to those mentioned in the first sentence. Since for $1 < p < \infty$ the $L_p(\mu)$ spaces are reflexive it is clear that $X^* = L_p(\mu)$ if and only if $X = L_q(\mu)$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Grothendieck proved the non obvious fact that if $X^* = L_\infty(\mu)$ then $X = L_1(\mu)$. Well-known results of F. Riesz and Kakutani show that if $X = C(K)$ then $X^* = L_1(\mu)$ for a suitable μ . There are, however, Banach spaces X which are not isometric to $C(K)$ spaces while their duals are $L_1(\mu)$ spaces. These are thus the only spaces which should be included in the geometric theory of the classical Banach spaces and which are not "classical" in the strict sense.*

A. J. Lazar, J. Lindenstrauss, *Banach spaces whose duals are L_1 -spaces and their representing matrices*, Acta Math. 126 (1971), 165-194.

Rzeczywista przestrzeń Banacha X , dla której $X^* = L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ , nazywana jest L_1 -predualną lub *przestrzenią Lindenstraussa*. W szczególności, jeśli $X^* = \ell_1$, to mówimy, że X jest ℓ_1 -predualną.

W ciągu ostatnich czterech lat głównym obiektem moich matematycznych zainteresowań było badanie geometrycznych i topologicznych własności ośrodkowych przestrzeni Lindenstraussa. Intensywna współpraca z moimi partnerami naukowymi z Włoch, Emanuelem Casinim z Università dell'Insubria w Como i Enrico Miglieriną z Università Cattolica del Sacro Cuore w Mediolanie, a później również z Liborem Veselým z Università di Milano oraz Roxaną Popescu z University of Pittsburgh (PA, USA), zaowocowała szeregiem nowych i interesujących wyników. W szczególności, rozważania obejmujące pewne klasyczne zagadnienia *metrycznej teorii punktu stałego* doprowadziły nas do zaskakującego odkrycia w innej, jak dotąd oddzielnie studiowanej *teorii polyhedrali*. Otóż okazało się, że pewne klasyczne wyniki charakteryzujące polyhedrale w klasie przestrzeni Lindenstraussa są fałszywe, a inne mają błędne dowody. Zajęliśmy się uporządkowaniem, odbudowaniem

i rozwijaniem tej teorii, koncentrując się przede wszystkim na wskazaniu geometrycznych równoważników własności polyhedralnych dla ℓ_1 -predualnych.

Obecnie, uzyskane przez nas rezultaty tworzą teorię kompletną, a jej kolejne etapy powstawania omówię w autoreferacie.

2. HIPERPŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI c I PREDUALNE ℓ_1

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha. Symbolami B_X oraz S_X oznaczamy, odpowiednio, domkniętą kulę jednostkową oraz sferę jednostkową w X . Przez X^* oznaczamy przestrzeń dualną do X . Jeśli $A \subset X$, to $\text{conv}(A)$, $\text{ext}(A)$, $\text{int}(A)$, $\overline{A}$, $[A]$ oraz $A^\perp$ oznaczają odpowiednio otoczkę wypukłą A , zbiór wszystkich punktów ekstremalnych A , wnętrze A , domknięcie A w X , domkniętą otoczkę liniową A w X oraz anihilator A w X^* . Jeśli $A \subset X^*$, to przez $\overline{A}^*$ oznaczamy słabe* domknięcie A , natomiast przez A' zbiór wszystkich słabych* punktów skupienia zbioru A :

$$A' = \{x^* \in X^* : x^* \in \overline{(A \setminus \{x^*\})}^*\}.$$

Mówimy, że podprzestrzeń liniowa Y przestrzeni X jest 1-komplementarna w X , jeśli istnieje rzut liniowy P z X na Y z $\|P\| = 1$. Jeśli $f \in X^*$, to przez $\ker f$ oznaczamy jądro funkcjonału f , tzn. $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Fakt, że X zawiera izometryczną kopię Y zapisujemy $Y \subset X$. Jeśli X jest izometrycznie izomorficzna z Y , to piszemy $X = Y$.

E. Michael i A. Pełczyński [64] oraz A. J. Lazar i J. Lindenstrauss [51] wykazali, że ośrodkowa przestrzeń Banacha X spełnia warunek $X^* = L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ wtedy i tylko wtedy, gdy X ma bazę monotoniczną $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ taką, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ podprzestrzeń $[\{x_i\}_{i=1}^n]$ jest izometryczna z ℓ_∞^n (przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $\|x\| = \|(x(1), x(2), \dots, x(n))\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x(i)|$). Chociaż twierdzenie to w pełni charakteryzuje przestrzenie Lindenstraussa w klasie ośrodkowych przestrzeni Banacha, w wielu sytuacjach wygodniej jest operować konkretnym modelem takiej przestrzeni.

Klasycznym przykładem ℓ_1 -predualnej jest przestrzeń c_0 ciągów zbieżnych do zera z normą maksimum. Izometryczny izomorfizm $\phi : \ell_1 \rightarrow c_0^*$ dany jest tutaj wzorem:

$$(\phi(y))(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)y(j)$$

dla $y = (y(1), y(2), \dots) \in \ell_1$ i $x = (x(1), x(2), \dots) \in c_0$.

Nasze rozważania rozpoczniemy od podsumowania znanych wyników dotyczących ℓ_1 -predualnych hiperpłaszczyzn w przestrzeni c_0 :

Twierdzenie 2.1 ([CMP2015], Theorem 1.1). *Niech $f \in \ell_1 = c_0^*$ będzie taki, że $\|f\|_{\ell_1} = 1$. Rozważmy hiperpłaszczyznę $V_f = \ker f \subset c_0$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) V_f jest 1-komplementarna,
- (2) V_f^* jest izometryczna z ℓ_1 ,
- (3) istnieje indeks j_0 taki, że $|f(j_0)| \geq \frac{1}{2}$,
- (4) V_f jest izometryczna z c_0 .

Równoważność (1) $\Leftrightarrow$ (3) została wykazana przez J. Blattera i E. W. Cheney'a [11]. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (4) wynika z faktu, że 1-komplementarne nieskończenie wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni c_0 są izometryczne z c_0 (patrz np. [59]). Oczywiście (4) $\Rightarrow$ (2). Przytoczmy teraz dowód implikacji (2) $\Rightarrow$ (1). Zauważmy najpierw, że V_f^* jest izometryczna z przestrzenią ilorazową $\ell_1/[f]$, a stąd $V_f^{**} = [f]^\perp = \{x^{**} \in \ell_\infty : x^{**}(f) = 0\}$. Przestrzeń V_f^{**} jest izometryczna z ℓ_∞ ponieważ V_f^* jest izometryczna z ℓ_1 . Wobec tego V_f^{**} jest 1-komplementarna w ℓ_∞ ([23], Proposition 5.13). Wystarczy teraz zastosować wynik M. Barontiego ([6], Corollary 2) mówiący, że V_f^{**} jest 1-komplementarna w ℓ_∞ wtedy i tylko wtedy, gdy V_f jest 1-komplementarna w c_0 .

Przestrzeń c ciągów zbieżnych z normą supremum jest kolejnym powszechnie znanym przykładem ℓ_1 -predualnej. W tym przypadku izometryczny izomorfizm $\phi : \ell_1 \rightarrow c^*$ dany jest wzorem:

$$(\phi(y))(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)y(j+1)$$

dla $y = (y(1), y(2), \dots) \in \ell_1$, $x = (x(1), x(2), \dots) \in c$ i $x(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)$.

Widzieliśmy już, że wszystkie ℓ_1 -predualne hiperpłaszczyzny w przestrzeni c_0 są w rzeczywistości izometryczne z c_0 . Okazuje się, że struktura ℓ_1 -predualnych hiperpłaszczyzn w przestrzeni c jest znacznie bogatsza. Zaczniemy od przedstawienia wyniku, który może być postrzegany jako odpowiednik Twierdzenia 2.1:

Twierdzenie 2.2 ([CMP2015], Theorem 1.2). *Niech $f \in \ell_1$ będzie taki, że $\|f\|_{\ell_1} = 1$ i niech $W_f = \ker f \subset c$. Rozważmy następujące warunki:*

- (1) W_f jest 1-komplementarna;
- (2) W_f jest izometryczna z c ;
- (3) istnieje $j_0 \geq 2$ takie, że $|f(j_0)| \geq \frac{1}{2}$;
- (4) W_f^* jest izometryczna z ℓ_1 ;
- (5) istnieje $j_0 \geq 1$ takie, że $|f(j_0)| \geq \frac{1}{2}$;
- (6) W_f jest izometryczna z c_0 ;
- (7) $\inf_P \|P\| = 2$ (gdzie $P : c \rightarrow W_f$ jest rzutem liniowym przestrzeni c na W_f);
- (8) $|f(1)| = 1$, $f(j) = 0$ dla każdego $j \geq 2$.

Wówczas zachodzą następujące implikacje:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Leftarrow (6) \Leftrightarrow (7) \Leftrightarrow (8).$$

Powyższe twierdzenie jest konsekwencją serii technicznych wyników wykazanych w rozdziałach 2 i 3, a także w rozdziale 4 (Proposition 4.1) w pracy [CMP2015].

W rezultacie zbiór wszystkich hiperpłaszczyzn W_f w przestrzeni c , dla których $W_f^* = \ell_1$, możemy podzielić na trzy rozłączne klasy:

- W_f jest izometryczna c (równoważnie, istnieje $j_0 \geq 2$ takie, że $|f(j_0)| \geq \frac{1}{2}$);
- W_f jest izometryczna z c_0 (równoważnie, $|f(1)| = 1$);
- W_f nie jest izometryczna ani z c ani z c_0 (równoważnie, $\frac{1}{2} \leq |f(1)| < 1$ i $|f(j)| < \frac{1}{2}$ dla każdego $j \geq 2$).

Okazuje się, że najciekawsza sytuacja ma miejsce w przypadku, gdy W_f nie jest izometryczna ani z c_0 ani z c . Dla tej klasy przestrzeni zbadaliśmy $\sigma(\ell_1, W_f)$ -punkty skupienia standardowej bazy w ℓ_1 oraz podaliśmy jawny wzór izometrycznego izomorfizmu ϕ z ℓ_1 na W_f^* .

Twierdzenie 2.3 ([CMP2015], Theorem 4.3). *Niech $W_f \subset c$ będzie taka, że $\frac{1}{2} \leq |f(1)| < 1$ i $|f(j)| < \frac{1}{2}$ dla każdego $j \geq 2$. Wówczas przekształcenie $\phi : \ell_1 \rightarrow W_f^*$ dane wzorem*

$$(\phi(y))(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)y(j)$$

dla $y = (y(1), y(2), \dots) \in \ell_1$ i $x = (x(1), x(2), \dots) \in W_f$ jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni ℓ_1 na W_f^* . Ponadto, jeśli przez (e_n^*) oznaczymy standardową bazę w przestrzeni ℓ_1 , to

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_f)} e^*,$$

gdzie $e^* = \left(-\frac{f(2)}{f(1)}, -\frac{f(3)}{f(1)}, -\frac{f(4)}{f(1)}, \dots\right)$.

Powyższe twierdzenie ma bardzo interesującą konsekwencję. Mianowicie, dla każdego punktu $e^* = (e^*(1), e^*(2), \dots) \in B_{\ell_1}$ możemy tak dobrać predualną X przestrzeni ℓ_1 , aby spełniony był warunek

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, X)} e^*.$$

W tym celu wystarczy rozważyć $X = W_f$ dla $f = (f(1), f(2), \dots) \in \ell_1$ spełniającego warunek:

$$f(1) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} |e^*(n)|}, \quad f(n) = -\frac{e^*(n-1)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} |e^*(n)|} \quad \text{dla każdego } n \geq 2.$$

Ponadto, można pokazać, że powyższy wybór przestrzeni predualnej jest jednoznaczny, tzn. jeśli X jest ℓ_1 -predualną, dla której $e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, X)} e^*$, to X musi być izometryczna z W_f (patrz Corollary 4.4 w [CMP2015]).

Podsumowując, wszystkie ℓ_1 -predualne, dla których standardowa baza w ℓ_1 jest słabo* zbieżna, zlokalizowane są wśród hiperpłaszczyzn w przestrzeni c .

Ostatnia część pracy [CMP2015] nawiązuje do wyniku W. B. Johnsona i M. Zippina [41] mówiącego, że każda ośrodkowa L_1 -predualna jest izometryczna z ilorazową przestrzenią $C(\Delta)$, gdzie Δ oznacza zbiór Cantora. Pytanie, czy dla każdej ℓ_1 -predualnej X istnieje przeliczalna i zwarta przestrzeń metryczna K taka, że X jest izometryczna z ilorazową przestrzenią $C(K)$ zostało rozstrzygnięte przez Alspacha [3]. Mianowicie, podał on przykład ℓ_1 -predualnej hiperpłaszczyzny w przestrzeni c , która nie jest izometryczna z ilorazową żadnej przestrzeni $C(\alpha)$, gdzie α oznacza przeliczalną liczbę porządkową i przez $C(\alpha)$ rozumiemy przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych na liczbach porządkowych mniejszych lub równych α z topologią porządkową. Przypomnijmy tutaj klasyczny wynik Mazurkiewicza i Sierpińskiego [63] mówiący, że każda przestrzeń $C(K)$, gdzie K jest przeliczalną i zwartą przestrzenią metryczną, jest izometryczna z przestrzenią $C(\alpha)$ dla pewnego α .

Poniższy rezultat, będący rozszerzeniem wyniku Alspacha, charakteryzuje wszystkie ℓ_1 -predualne hiperpłaszczyzny w c mające tę własność.

Wniosek 2.4 ([CMP2015], Corollary 4.5). *Istnieje przeliczalna liczba porządkowa α taka, że W_f jest izometryczna z ilorazową $C(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*

- (1) *istnieje indeks $j_0 \geq 2$ taki, że $|f(j_0)| \geq \frac{1}{2}$;*
- (2) *$\frac{1}{2} \leq |f(1)| \leq 1$ i $|f(j)| < \frac{1}{2}$ dla wszystkich $j \geq 2$ i $f = (f(1), f(2), \dots, f(n), 0, 0, \dots)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.*

3. SŁABA* WŁASNOŚĆ PUNKTU STAŁEGO W ℓ_1

Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Mówimy, że niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły podzbiór C przestrzeni X ma *własność punktu stałego* (w skrócie FPP od angielskiej nazwy *fixed point property*), jeśli każde *nieoddalające* przekształcenie $T : C \rightarrow C$ (tzn. $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in C$) ma punkt stały. Przestrzeń X ma *własność punktu stałego* (w skrócie FPP), jeśli każdy niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły podzbiór C tej przestrzeni ma własność punktu stałego. Przestrzeń X ma *słabą własność punktu stałego* (w skrócie *w-FPP* od angielskiej nazwy *weak fixed point property*), jeśli każdy niepusty, słabo zwarty, wypukły zbiór $C \subset X$ ma FPP. Przestrzeń dualna X^* ma *słabą* własność punktu stałego* (w skrócie

w^* -FPP lub $\sigma(X^*, X)$ -FPP od angielskiej nazwy *weak* fixed point property*), jeśli każdy niepusty, słabo* zwarty, wypukły zbiór $C \subset X^*$ ma FPP.

Oczywiście, dla dowolnej przestrzeni X zachodzi implikacja:

$$X \text{ ma FPP} \Rightarrow X \text{ ma } w\text{-FPP}.$$

Ponadto, dla przestrzeni dualnej X^* mamy:

$$X^* \text{ ma FPP} \Rightarrow X^* \text{ ma } w^*\text{-FPP} \Rightarrow X^* \text{ ma } w\text{-FPP}.$$

Jeśli X jest przestrzenią refleksywną, to powyższe trzy własności są równoważne.

Metryczna Teoria Punktu Stałego jest szeroko studiowana w książce K. Goebela i W. A. Kirka [31] oraz Handbooku [44]. Tutaj przytoczymy jedynie te spośród znanych wyników, które dotyczą klasycznych przestrzeni Banacha.

- $L_p(\mu)$ mają FPP dla $p \in (1, \infty)$ (F. E. Browder, [17], [18], D. Göhde [36], W. A. Kirk [43]).
- $L_1(0, 1)$ nie ma w -FPP (D. E. Alspach, [2]). W konsekwencji przestrzenie $C[0, 1]$, ℓ_∞ i $L_\infty(0, 1)$ nie mają w -FPP.
- L_1 -predualne nie mają FPP. Wynika to z twierdzenia Zippina [78] mówiącego, że każda taka przestrzeń zawiera izometryczną kopię przestrzeni c_0 (przestrzeń c_0 nie ma FPP; istotnie, łatwo zauważyć, że przekształcenie $T : B_{c_0} \rightarrow B_{c_0}$ dane wzorem $T(x(1), x(2), \dots) = (1, x(1), x(2), \dots)$ jest izometrią bez punktu stałego).
- c_0 i c mają w -FPP (B. Maurey, [61]).
- $C(\omega^n + 1)$ ma w -FPP, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i ω jest pierwszą nieskończoną liczbą porządkową (J. Elton, P. K. Lin, E. Odell, S. Szarek, [22]).
- Jeśli X jest ośrodkową przestrzenią Lindenstraussa, dla której dualna X^* nie jest ośrodkowa, to X nie ma w -FPP. Istotnie, Lazar i Lindenstrauss [52] wykazali, że każda taka przestrzeń X zawiera izometryczną kopię przestrzeni $C(\Delta)$, gdzie Δ jest zbiorem Cantora. W konsekwencji X zawiera izometryczną kopię $L_1(0, 1)$, a zatem na mocy wyniku Alspacha przestrzeń X nie ma w -FPP.
- ℓ_1 ma w -FPP; ponadto, na mocy twierdzenia Schaudera o punkcie stałym [73] oraz faktu, że ℓ_1 ma własność Schura, każde ciągle przekształcenie niepustego, słabo zwanego i wypukłego zbioru w siebie ma punkt stały.
- ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, c_0)$ -FPP (L. A. Karlovitz, [42]).
- ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, c)$ -FPP. Istotnie, zbiór

$$S^+ = \left\{ (x(1), x(2), \dots) \in \ell_1 : \sum_{i=1}^{\infty} x(i) = 1, x(i) \geq 0, i = 1, 2, \dots \right\}$$

jest wypukły, $\sigma(\ell_1, c)$ -zwarty i przekształcenie $T : S^+ \rightarrow S^+$ dane wzorem

$$T(x(1), x(2), \dots) = (0, x(1), x(2), \dots)$$

jest izometrią bez punktu stałego.

- $C(K)^*$ nie ma w^* -FPP, jeśli K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa (oczywiście K jest zbiorem nieskończonym) (M. Smyth, [75]).
- Niech τ będzie lokalnie wypukłą topologią w przestrzeni ℓ_1 słabszą niż słaba topologia na kuli jednostkowej. Przypuśćmy, że standardowa baza (e_n) jest zbieżna do $e \in \ell_1$ w topologii τ . Wówczas ℓ_1 ma τ -FPP wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

$$(1) \|e\| < 1;$$

$$(2) \|e\| = 1 \text{ i zbiór } N^+ = \{n \in \mathbb{N} : e(n) \geq 0\} \text{ jest skończony.}$$

Powyższy wynik został wykazany przez M. A. Japón-Pinedę i S. Prusa ([39], Theorem 8) i obejmuje on te spośród słabych* topologii w ℓ_1 , dla których standardowa

baza (e_n^*) jest słabo* zbieżna. Przypomnijmy, że wszystkie ℓ_1 -predualne posiadające tę własność zostały scharakteryzowane w poprzednim rozdziale. W rezultacie otrzymujemy następujące

Stwierdzenie 3.1 ([CMP2017], Proposition 2.2). *Niech $f \in \ell_1 = c^*$ będzie taki, że $\|f\| = 1$, $\frac{1}{2} \leq |f(1)| \leq 1$ i $|f(j)| \leq \frac{1}{2}$ dla każdego $j \geq 2$. Przestrzeń ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_f)$ -FPP wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden poniższych z warunków:*

- (1) $|f(1)| > \frac{1}{2}$,
- (2) $|f(1)| = \frac{1}{2}$ i zbiór $N^+ = \{n \in \mathbb{N} : f(1)f(n+1) \leq 0\}$ jest skończony.

Uwaga 1 ([CMP2017], Remark 2.6). W przypadku pewnej szczególnej rodziny zbiorów w przestrzeni ℓ_1 , charakteryzacja tych spośród nich, które mają FPP została podana przez K. Goebła i T. Kuczumowa [32]. Rozważmy dodatnią część sfery jednostkowej w ℓ_1 :

$$S^+ = \overline{\text{conv}} \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^* : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Niech (a_i) będzie ograniczonym ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych. Połóżmy $a = \inf a_i$ oraz $N_0 = \{i : a_i = a\}$. Zmodyfikujmy teraz zbiór S^+ przesuwając jego wierzchołki wzdłuż półprostych wychodzących z zera:

$$C = \overline{\text{conv}} \{(1 + a_i)e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (1 + a_i) e_i^* : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Zbiory tej postaci nazywane są obecnie *zbiorami Goebła-Kuczumowa*. W pracy [32] autorzy wykazali, że zbiór C ma FPP wtedy i tylko wtedy, gdy N_0 jest niepusty i skończony.

Okazuje się, że wiele tego typu zbiorów jest słabo* zwartych względem odpowiednio dobranej słabej* topologii mającej FPP. Aby to zobrazować, dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$ zdefiniujmy zbiór

$$C_\varepsilon = \left\{ \alpha_1 (1 - \varepsilon) e_1^* + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i e_i^* : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Zbiór C_ε jest wypukły, ograniczony i domknięty. Ponadto, ma on FPP ponieważ $\frac{1}{1-\varepsilon} C_\varepsilon$ ma FPP. Oczywiście C_ε nie jest ani $\sigma(\ell_1, c)$ -zwarty ani $\sigma(\ell_1, c_0)$ -zwarty. Tym niemniej, dla $f = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}, -\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, 0, 0, \dots\right)$, $W_f^* = \ell_1$ i

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_f)} (1 - \varepsilon) e_1^*.$$

Wobec tego C_ε jest $\sigma(\ell_1, W_f)$ -zwarty. Na mocy Stwierdzenia 3.1, ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_f)$ -FPP.

Głównym celem tego rozdziału jest scharakteryzowanie wszystkich ośrodkowych przestrzeni Lindenstraussa X , dla których dualna X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP. Nasze rozważania rozpoczniemy od przeanalizowania roli jaką odgrywa tutaj przestrzeń c .

Twierdzenie 3.2 ([CMP2017], Theorem 3.2). *Jeżeli ośrodkowa przestrzeń Banacha X zawiera izometryczną kopię przestrzeni c , to X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP.*

Powyższe twierdzenie rozszerza wspomniany wcześniej wynik Smyth'a, a jego dowód opiera się na następującej obserwacji:

Stwierdzenie 3.3 ([CMP2017], Proposition 3.1). *Jeżeli X jest ośrodkową przestrzenią Banacha zawierającą izometryczną kopię przestrzeni c , to X zawiera podprzestrzeń Y izometryczną z c i 1-komplementarną w X .*

Rzeczywiście, jeśli $c \subset X$, to na mocy powyższego stwierdzenia istnieje podprzestrzeń Y izometryczna z c oraz rzut liniowy $P : X \rightarrow Y$ z $\|P\| = 1$. Wtedy operator sprzężony $P^* : Y^* = c^* \rightarrow X^*$ jest słabo* ciągłą izometrią z c^* w X^* . Wobec tego $P^*(S^+)$ jest wypukłym, $\sigma(X^*, X)$ -zwartym zbiorem nie mającym FPP.

Uwaga 2 ([CMP2017], Remark 3.3). C. Lennard ([74], patrz Examples 3.2-3.3, str. 41-43) podał przykład wypukłego, słabo* zwanego zbioru $C \subset c^*$ oraz przekształcenia kontrakcyjnego $T : C \rightarrow C$ (tzn. $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in C, x \neq y$) bez punktu stałego. Zatem, przy założeniach poprzedniego twierdzenia, X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP dla przekształceń kontrakcyjnych.

Uwaga 3 ([CMP2017], Remark 3.5). Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Przypuśćmy, że istnieje ilorazowa X/Y izometryczna z c . Twierdzenie 3.2 pokazuje, że $Y^\perp$ nie ma $\sigma(Y^\perp, X/Y)$ -FPP, a stąd również X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP.

Zauważmy, że rozważanie ilorazowej jest istotnym osłabieniem założenia w Twierdzeniu 3.2. Istotnie, na mocy Stwierdzenia 3.3 każda ośrodkowa przestrzeń Banacha zawierająca izometryczną kopię przestrzeni c ma ilorazową izometryczną z c . Ponadto, przestrzeń $X = \ell_1$ nie zawiera żadnej kopii przestrzeni c ale ma ilorazową izometryczną z c .

Powróćmy teraz do interesującego nas przypadku L_1 -predualnych. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, Lazar i Lindenstrauss [52] wykazali, że każda ośrodkowa L_1 -predualna, której dualna nie jest ośrodkowa, zawiera podprzestrzeń izometryczną z $\mathcal{C}(\Delta)$, przestrzenią funkcji ciągłych na zbiorze Cantora Δ , wyposażoną w standardową normę supremum. Ponieważ $\mathcal{C}(\Delta)$ jest uniwersalna dla przestrzeni ośrodkowych, więc w szczególności zawiera izometryczną kopię c . Otrzymujemy zatem następujący

Wniosek 3.4 ([CMP2017], Corollary 3.4). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Lindenstraussa, dla której X^* nie jest ośrodkowa. Wtedy X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP.*

Wiadomo, że jeśli X jest przestrzenią Lindenstraussa, dla której X^* jest ośrodkowa, to $X^* = \ell_1$. Wobec tego jedynym interesującym nas przypadkiem jest klasa ℓ_1 -predualnych, a w kontekście omawianych powyżej wyników naturalne wydają się następujące pytania:

Przypuśćmy, że X jest ℓ_1 -predualną, dla której ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP. Czy X zawiera izometryczną kopię przestrzeni c ? Czy X ma ilorazową zawierającą izometryczną kopię c ?

Okazuje się, że odpowiedź na powyższe dwa pytania jest przecząca. Kluczowy jest tutaj następujący wynik:

Stwierdzenie 3.5 ([CMP2017], Proposition 2.1). *Niech $f \in \ell_1 = c^*$ będzie taki, że $\|f\| = 1$ i $|f(1)| \geq \frac{1}{2}$. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (1) W_f zawiera podprzestrzeń izometryczną z c .
- (2) $|f(1)| = \frac{1}{2}$, $\{n \in \mathbb{N} : f(1)f(n+1) > 0\}$ jest skończony i $\{n \in \mathbb{N} : f(n+1) = 0\}$ jest nieskończony.

Przykład 1 ([CMP2017], Example 2.4). Rozważmy hiperpłaszczyznę W_f , gdzie

$$f = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots \right) \in \ell_1.$$

Wówczas

- $W_f^* = \ell_1$ (patrz Twierdzenie 2.3);

- W_f nie zawiera izometrycznej kopii przestrzeni c (patrz Stwierdzenie 3.5);
- ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, W_f)$ -FPP (patrz Stwierdzenie 3.1).

Powyższa hiperpłaszczyzna ma jeszcze inną własność, ważną w kontekście głównego wyniku tego rozdziału (Twierdzenie 3.7). Mianowicie,

- W_f nie ma ilorazowej zawierającej izometryczną kopię przestrzeni c .

Kolejny przykład pokazuje, że również w klasie ℓ_1 -predualnych rozważanie ilorazowej jest istotnym rozszerzeniem Twierdzenia 3.2.

Przykład 2 ([CMP2017], Example 3.6). Rozważmy przestrzeń W_f , gdzie

$$f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, 0, \dots \right) \in \ell_1.$$

Wówczas:

- $W_f^* = \ell_1$ (patrz Twierdzenie 2.3);
- W_f nie zawiera izometrycznej kopii przestrzeni c (patrz Stwierdzenie 3.5).

Tym niemniej, istnieje ilorazowa przestrzeni W_f izometryczna z c . Istotnie, wystarczy rozważyć podprzestrzeń

$$Y = \{y \in W_f : y(2k) = 0 \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{N}\}$$

oraz przekształcenie $T : c \longrightarrow W_f/Y$ dane wzorem

$$T(x) = \left(\frac{7}{3}x(0), x(1), x(0), x(2), x(0), \dots \right) + Y$$

dla każdego $x \in c$. Można pokazać, że T jest izometrycznym izomorfizmem.

Powyższe przykłady sugerują, że rozwiązanie naszego głównego problemu ma bardzo delikatną naturę. Ponieważ przestrzenie W_f , których dualne nie mają w^* -FPP odegrają ważną rolę w naszych rozważaniach, wprowadzimy następującą definicję.

Definicja 1 ([CMP2017], Definition 2.3). Mówimy, że przestrzeń W_f jest “zła w sensie w^* -FPP” (w skrócie “zła”), jeżeli $f \in \ell_1$ jest taki, że $\|f\| = 1$, $|f(1)| = \frac{1}{2}$ i zbiór $N^+ = \{n \in \mathbb{N} : f(1)f(n+1) \leq 0\}$ jest nieskończony.

Kolejny wynik jest “subtelniejszą” wersją Twierdzenia 3.2:

Twierdzenie 3.6 ([CMP2017], Theorem 3.7). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Jeśli X zawiera izometryczną kopię “złej” W_f , to X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP.*

Uwaga 4 ([CMP2017], Remark 3.8). Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha i przypuśćmy, że “zła” W_f jest podprzestrzenią ilorazowej X/Y przestrzeni X . Na mocy Twierdzenia 3.6, $Y^\perp$ nie ma $\sigma(Y^\perp, X/Y)$ -FPP. Stąd X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP.

Scharakteryzujemy teraz wszystkie ℓ_1 -predualne X , dla których nie zachodzi $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP. Jest to główny wynik w pracy [CMP2017]. Kluczowy jest tutaj dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (4), ponieważ pozwala on na opuszczenie restrykcyjnego założenia o zbieżności bazy w ℓ_1 użytego w pracy M. A. Japón-Pinedy i S. Prusa ([39], Theorem 8).

Twierdzenie 3.7 ([CMP2017], Theorem 4.1). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (1) ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP dla przekształceń nieoddalających.
- (2) ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP dla izometrii.
- (3) ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP dla przekształceń kontrakcyjnych.

- (4) Istnieje podciąg $(e_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$ standardowej bazy $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ w ℓ_1 , który jest $\sigma(\ell_1, X)$ -zbieżny do elementu $e^* \in \ell_1$ takiego, że $\|e^*\| = 1$ oraz $e^*(n_k) \geq 0$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.
- (5) Istnieje ilorazowa przestrzeni X izometryczna ze “złą” W_f .
- (6) Istnieje ilorazowa przestrzeni X zawierająca izometryczną kopię “złej” W_g .

Uwaga 5 ([CMP2017], Remark 4.2). Przypomnijmy, że “złe” W_f i W_g w warunkach (5) i (6) Twierdzenia 3.7 nie mogą być zastąpione przez c (patrz Przykład 1).

Nie wiadomo, czy z faktu, że ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP wynika, że X zawiera izometryczną kopię “złej” W_f .

4. POLYHEDRALNOŚĆ DLA PRZESTRZENI LINDENSTRAUSSA

Rozważania dotyczące słabej* własności punktu stałego, a w szczególności Stwierdzenie 3.5, doprowadziły nas do zaskakującego odkrycia w teorii polyhedrali.

Przypomnijmy, że rzeczywistą przestrzeń Banacha X nazywamy *polyhedralem*, jeśli domknięta kula jednostkowa dowolnej skończonej wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni X jest wielościanem (tzn. ma skończoną liczbę punktów ekstremalnych lub, równoważnie, powstaje jako przecięcie skończonej liczby domkniętych półprzestrzeni). Definicja ta została wprowadzona przez Klee’go [47], który rozszerzył definicję wypukłego, skończonej wymiarowego wielościanu na przypadek domkniętej kuli jednostkowej B_X w nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha X . Przestrzeń c_0 jest klasycznym przykładem przestrzeni Lindenstraussa będącej polyhedralem (patrz [47], Proposition 4.7). Ponadto Lindenstrauss [57] wykazał, że dualna dowolnej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha nie jest polyhedralem. W szczególności, żadna nieskończonej wymiarowa przestrzeń refleksywna, a także przestrzeń ℓ_1 nie są polyhedrami. Przestrzeń c jest przykładem przestrzeni Lindenstraussa, która nie jest polyhedralem. Elementarny dowód tego faktu podał Libor Veselý (patrz [38]).

Podamy teraz przykład ℓ_1 -predualnej, której domknięta kula jednostkowa ma punkt ekstremalny ale przestrzeń ta nie zawiera izometrycznej kopii c . Pokazuje to, że wynik Zippina [78] opublikowany w 1969 roku jest fałszywy. Przypomnijmy zatem następujący

Fakt 1. W uwadze A ostatniego rozdziału pracy [M. Zippin, *On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 23 (1969), 378-385] autor stwierdził, że każda ośrodkowa przestrzeń Lindenstraussa, której kula ma punkt ekstremalny, zawiera izometryczną (1-komplementarną) kopię przestrzeni c .

Podamy teraz warunek konieczny na to, aby ośrodkowa przestrzeń Banacha zawierała izometryczną kopię przestrzeni c :

Twierdzenie 4.1 ([CMPV2016], Theorem 2.1). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Jeżeli X zawiera podprzestrzeń liniowo izometryczną z c , to istnieją $x \in X$ oraz ciąg $(v_n^*) \subset \text{ext}(B_{X^*})$ takie, że (v_n^*) jest słabo* zbieżny do v^* , $v_n^*(x) = v^*(x) = \|v^*\| = \|x\| = 1$ i $\|v_n^* \pm v^*\| = 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Podkreślimy, że wykazanie Twierdzenia 4.1 wymagało użycia innej niż w Stwierdzeniu 3.5 techniki dowodzenia. W przypadku, gdy X jest predualną przestrzenią ℓ_1 , otrzymujemy następujący

Wniosek 4.2 ([CMPV2016], Corollary 2.2). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Jeżeli X zawiera podprzestrzeń izometryczną z c , to istnieją $x \in B_X$ oraz podciąg $(e_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$ standardowej bazy $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ w ℓ_1 takie, że:*

- (1) $e_{n_k}^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, X)} e^*$ i $\text{supp } e_{n_k}^* \cap \text{supp } e^* = \emptyset$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, gdzie dla $x^* \in \ell_1 = X^*$ definiujemy $\text{supp } x^* := \{i \in \mathbb{N} : x^*(i) \neq 0\}$,

(2) $e_{n_k}^*(x) = e^*(x) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Przykład 3 ([CMPV2016], Section 3). Rozważmy następującą hiperpłaszczyznę w przestrzeni c :

$$W = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) \in c : \lim_i x(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x(i)}{2^i} \right\}.$$

Na mocy Twierdzenia 2.3, $W^* = \ell_1$ oraz

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W)} e^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \right).$$

Zatem, korzystając z Wniosku 4.2 (patrz również Stwierdzenie 3.5) stwierdzamy, że W nie zawiera izometrycznej kopii przestrzeni c . Ale $x = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in W$ jest punktem ekstremalnym kuli B_W (ponieważ jest punktem ekstremalnym kuli B_c). Oznacza to, że wynik Zippina jest fałszywy (patrz Fakt 1).

To właśnie to niespodziewane odkrycie zaprowadziło nas do zupełnie nieznanego nam wtedy teorii polyhedrali. Należy tutaj podkreślić, że główny wynik w pracy Zippina jest prawdziwy i stanowi, że każda nieskończenie wymiarowa L_1 -predualna zawiera izometryczną kopię przestrzeni c_0 . Natomiast rezultat opisany w Fakcie 1 jest jedynie jednym z końcowych komentarzy w jego pracy. Problem w tym, że wkrótce potem został on wykorzystany przez innych. Zaczniemy jednak od początku. W 1964 roku Lindenstrauss sformułował następujące

Twierdzenie 4.3 (J. Lindenstrauss, [58]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Rozważmy następujące własności.*

- (1) $X^* = L_1(\mu)$ i X jest polyhedralem.
- (2) Dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i każdego operatora zwartego $T : Y \rightarrow X$, istnieje zwarte rozszerzenie $\tilde{T} : Z \rightarrow X$ z $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Wówczas zachodzi implikacja: (2) $\Rightarrow$ (1).

J. Lindenstrauss postawił pytanie czy (1) $\Rightarrow$ (2)? Odpowiedź na nie została podana kilka lat później A. J. Lazara [50]. Wykorzystał on w tym celu geometryczną charakteryzację tej własności opartą o pojęcie słabo* domkniętego *fejsu* kuli: przypomnijmy, że domknięty i wypukły podzbiór F kuli B_X jest *fejsem*, jeśli z warunku $(1 - \lambda)x + \lambda y \in F$ dla $x, y \in B_X$ i $\lambda \in (0, 1)$ otrzymujemy $x, y \in F$. Ponadto fejs F nazywamy *właściwym*, jeśli $F \neq B_X$.

Fakt 2. W pracy [A. J. Lazar, *Polyhedral Banach spaces and extensions of compact operators*, *Israel J. Math.* 7 (1969), 357-364.] Twierdzenie 3 stanowi, że dla dowolnej przestrzeni Lindenstraussa X następujące warunki są równoważne:

- (1) X jest polyhedralem;
- (2) X nie zawiera izometrycznej kopii c ;
- (3) B_{X^*} nie ma właściwych, nieskończenie wymiarowych, słabo* domkniętych fejsów;
- (4) dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i dla każdego operatora zwartego $T : Y \rightarrow X$ istnieje zwarte rozszerzenie $\tilde{T} : Z \rightarrow X$ z $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Własność przestrzeni X opisaną w punkcie (4) nazywać będziemy *własnością rozszerzania dla operatorów zwartych*. Dowód powyższego twierdzenia przebiegał następująco: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1), natomiast wspomniany wcześniej wynik Zippina został wykorzystany w dowodzie implikacji (2) $\Rightarrow$ (3).

Uwaga 6 ([CMPV2016], Section 3). Zbiór

$$S^+ = \left\{ (x(1), x(2), \dots) \in \ell_1 : \sum_{i=1}^{\infty} x(i) = 1, x(i) \geq 0, i = 1, 2, \dots \right\}$$

jest nieskończenie wymiarowym, $\sigma(\ell_1, W)$ -zwartym właściwym fejssem kuli B_{ℓ_1} . Wobec tego implikacja (2) $\Rightarrow$ (3) jest fałszywa.

Wynik Lazara został następnie wykorzystany przez A. Gleita i R. McGuigana [26]:

Fakt 3. W pracy [A. Gleit, R. McGuigan, *A note on polyhedral Banach spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 33 (1972), 398-404.], Twierdzenie 1.2 stanowi, że dla dowolnej przestrzeni Lindenstraussa X następujące warunki są równoważne:

- (1) $x^*(x) < 1$ dla każdego $x \in S_X$ i $x^* \in (\text{ext}(B_{X^*}))'$ (własność (GM));
- (2) X jest polyhedralem;
- (3) X nie zawiera izometrycznej kopii c .

Dowód powyższego twierdzenia przebiegał następująco: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), a dowód implikacji (3) $\Rightarrow$ (1) oparty był na (fałszywej) implikacji (2) $\Rightarrow$ (3) w twierdzeniu Lazara.

Uwaga 7 ([CMPV2016], Section 3). Przestrzeń W nie ma własności (GM). Istotnie, na mocy Twierdzenia 2.3, dla $x = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in S_W$ i $x^* = e^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots) \in (\text{ext}(B_{W^*}))'$ mamy $x^*(x) = 1$. Pokazuje to, że implikacja (3) $\Rightarrow$ (1) jest fałszywa.

Fakt 4. W pracy [A. Gleit, R. McGuigan, *A note on polyhedral Banach spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 33 (1972), 398-404.], Wniosek 2.7 stanowi, że dla dowolnej przestrzeni sympleksowej $A(K)$ tzn. przestrzeni wszystkich funkcji afinicznych ciągłych na sympleksie Choqueta K , z normą supremum, następujące warunki są równoważne:

- (1) nie istnieje punkt $x^* \in (\text{ext}(B_{X^*}))'$ z $\|x^*\| = 1$;
- (2) X jest polyhedralem;
- (3) X nie zawiera izometrycznej kopii c .

Dowód powyższego wniosku przebiegał następująco: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Uwaga 8 ([CMPV2016], Section 3). Przestrzeń W jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $A(S^+)$. Oznacza to, że implikacja (3) $\Rightarrow$ (1) jest fałszywa.

Uwaga 9 ([CMPV2016], Section 3). Przestrzeń W jest polyhedralem. Aby to wykazać, wystarczy sprawdzić, że spełnia ona następujący warunek:

$$\sup \{x^*(x) : x^* \in \text{ext}(B_{X^*}) \setminus D(x)\} < 1$$

dla każdego $x \in S_X$, gdzie $D(x) = \{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = 1\}$. Warunek ten został wprowadzony przez B. Brosowskiego i F. Deutscha [15]. Następnie R. Durier i P. L. Papini wykazali, że implikuje on polyedralność w ogólnym przypadku przestrzeni Banacha ([21], Theorem 1).

Wobec Uwagi 9 oraz Uwagi 7, dowód implikacji (3) $\Rightarrow$ (2) w twierdzeniu opisanym w Fakcie 3 jest błędny. Okazuje się jednak, że sama implikacja jest prawdziwa. Zaczniemy od przypadku ℓ_1 -predualnych:

Twierdzenie 4.4 ([CMPV2016], Theorem 4.1). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Następujące warunki są równoważne:*

- (1) X jest polyhedralem;
- (2) X nie zawiera izometrycznej kopii c ;
- (3) $\sup \{x^*(x) : x^* \in \text{ext}(B_{X^*}) \setminus D(x)\} < 1$ dla każdego $x \in S_X$ (własność (BD)).

Oczywiście wystarczy wykazać, że (2) $\Rightarrow$ (3). Głównym narzędziem w dowodzie tej implikacji jest wynik I. Gasparisa ([25], Theorem 1.1).

W ogólnym przypadku przestrzeni Lindenstraussa mamy następujące

Twierdzenie 4.5 ([CMPV2016], Theorem 4.3). *Niech X będzie przestrzenią Lindenstraussa. Następujące własności są równoważne:*

- (1) X jest polyhedralem;
- (2) X nie zawiera izometrycznej kopii c ;
- (3) X ma własność (BD).

Dowód powyższego twierdzenia oparty jest na Twierdzeniu 4.4, pracy [77] oraz serii innych znanych wyników, które można odnaleźć w książce Lacey [49].

Przypomnijmy, że łańcuch implikacji w twierdzeniu Lazara (patrz Fakt 2) został przezwany. Wobec tego pytanie postawione przez Lindenstraussa, czy polyedralność implikuje własność rozszerzania dla operatorów zwartych, wciąż pozostaje otwarte. Odpowiedź na nie zawarta jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 4.6 ([CMPV2016], Theorem 5.1). *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Przypuśćmy, że istnieje $x \in S_X$ taki, że $D(x)$ nie jest normowo zwarty. Wówczas istnieją ośrodkowa przestrzeń Banacha Z , komplementarna podprzestrzeń $Y \subset Z$ oraz operator zwarty $T: Y \rightarrow X$ takie, że T nie ma zwartego rozszerzenia $\tilde{T}: Z \rightarrow X$ z zachowaniem normy.*

Uwaga 10 ([CMPV2016], Section 5). Dla przestrzeni W i punktu $x = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in S_W$ mamy $D(x) = S^+$ (patrz Twierdzenie 2.3). Zatem, na mocy Twierdzenia 4.6, W nie ma własności rozszerzania dla operatorów zwartych. Wobec Uwagi 9 stwierdzamy, że implikacja (1) $\Rightarrow$ (4) w twierdzeniu Lazara jest fałszywa. Oznacza to, że odpowiedź na pytanie postawione przez Lindenstraussa jest przecząca.

Kolejny wynik podaje warunek konieczny i dostateczny na to, aby przestrzeń Banacha miała własność rozszerzania dla operatorów zwartych.

Twierdzenie 4.7 ([CMPV2016], Theorem 5.3). *Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Następujące warunki są równoważne.*

- (1) X jest przestrzenią Lindenstraussa, dla której każdy zbiór $D(x)$ ($x \in S_X$) jest skończenie wymiarowy (własność Δ w [24]).
- (2) Dla dowolnych przestrzeni $Y \subset Z$, każdy operator zwarty $T: Y \rightarrow X$ dopuszcza rozszerzenie $\tilde{T}: Z \rightarrow X$ będące operatorem zwartym z zachowaniem normy.

Okazuje się, że w przeciwieństwie do polyedralności, warunek (3) w twierdzeniu Lazara jak również własność (GM) w twierdzeniu Gleita i McGuigana są równoważne własności rozszerzania dla operatorów zwartych i jest to prosta konsekwencja innego wyniku Lazara (Proposition 1 w [50]). Powróćmy jeszcze do tego zagadnienia w rozdziale 6.

Uwaga. Warto tutaj wspomnieć, że profesor Mordecai Zippin po zapoznaniu się z naszymi wynikami uznał nasze racje i w swojej najnowszej pracy [*Correction to “On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces”*, Proc. Amer. Math. Soc. (2018) DOI: 10.1090/proc/14196] zaprezentował dwie poprawne wersje uwagi A oraz krótki dowód głównego wyniku z 1969 roku. Kluczową rolę w jego rozważaniach odgrywają hiperpłaszczyzny w przestrzeni c .

5. STABILNOŚĆ SŁABEJ* WŁASNOŚCI PUNKTU STAŁEGO W ℓ_1

W niniejszym rozdziale scharakteryzujemy ośrodkowe przestrzenie Lindenstraussa X , dla których dualna X^* ma stabilną słabą* własność punktu stałego. Ponadto, dla każdej z nich podamy dokładną wartość stałej stabilności słabej* własności punktu stałego.

Ogólnie mówiąc, zagadnienie stabilności własności punktu stałego zajmuje się następującym pytaniem: przypuśćmy, że przestrzeń Banacha X ma własność punktu stałego; czy własność ta jest zachowana dla przestrzeni bliskich przestrzeni X w sensie odległości Banacha-Mazura? Przypomnijmy, że odległość Banacha-Mazura pomiędzy izomorficznymi przestrzeniami X i Y dana jest wzorem:

$$d(X, Y) = \inf \left\{ \|\phi\| \|\phi^{-1}\| : \phi \text{ jest izomorfizmem z } X \text{ na } Y \right\}.$$

Przytoczymy teraz kilka znanych wyników dotyczących stabilnej własności punktu stałego.

- Przestrzenie $L_p(\mu)$ mają stabilną własność punktu stałego dla $p \in (1, \infty)$. Pierwszy tego typu wynik pochodzi od K. Goebela i W. A. Kirka [30] i dotyczy on własności punktu stałego dla przekształceń *jednostajnie lipschitzowskich*: przypomnijmy, że przekształcenie $T : C \rightarrow C$ określone na niepustym podzbiore C przestrzeni Banacha X nazywamy *jednostajnie k -lipschitzowskim*, jeśli dla wszystkich $x, y \in C$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k \|x - y\|.$$

Autorzy wykazali, że jeśli X jest jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z modulem wypukłości δ_X , C jest niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X , a γ stałą będącą rozwiązaniem równania

$$\gamma \left(1 - \delta_X \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) = 1,$$

to dla każdej stałej $k < \gamma$ dowolne jednostajnie k -lipschitzowskie przekształcenie $T : C \rightarrow C$ ma punkt stały w C . Oczywiście dla każdej jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha mamy $\gamma > 1$, a w przypadku przestrzeni Hilberta $\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Następnie wynik ten został poprawiony i uogólniony na przypadek przestrzeni metrycznych przez E. A. Lifshitzę [53]. Wykazał on, że w przypadku przestrzeni Hilberta teza powyższego twierdzenia pozostaje prawdziwa dla stałej $k < \sqrt{2}$. Nie wiadomo, czy to oszacowanie jest dokładne. Znany przykład J. B. Baillona [5] pokazuje, że nie może ono przekroczyć $\frac{\pi}{2}$. Zauważmy, że jeśli dla pewnego $\gamma > 1$ przestrzeń X ma własność punktu stałego dla przekształceń jednostajnie lipschitzowskich ze stałą $k < \gamma$, to Y ma FPP, o ile $d(X, Y) < \gamma$.

- Jeśli X jest przestrzenią Banacha taką, że $d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ dla pewnego $1 < p < \infty$, to X ma FPP (T. Domínguez Benavides, [9]). W szczególności, jeśli $p = 2$, to otrzymujemy oszacowanie $d(X, \ell_2) < \sqrt{3}$. Wynik ten został poprawiony przez Pei-Kee Lina [55]. Wykazał on, że jeśli X jest przestrzenią Banacha izomorficzną z przestrzenią Hilberta H , dla której $d(X, H) < \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$, to X ma FPP. Następnie oszacowanie to zostało nieznacznie poprawione przez E. Mazcuñán-Navarro [62]. Autorka wykazała, że konkluzja powyższego twierdzenia pozostaje prawdziwa przy założeniu $d(X, H) < \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$. Tym niemniej fundamentalne pytanie o istnienie przestrzeni refleksywnej nie posiadającej FPP wciąż pozostaje otwarte.
- Jeśli X jest przestrzenią Banacha taką, że $d(X, c_0) < 2$ lub $d(X, c) < 2$, to X ma w -FPP (J. Borwein, B. Sims, [13]). Nie wiadomo, czy powyższe oszacowania są dokładne.
- Jeśli Y jest przestrzenią Banacha, dla której $d(\ell_1, Y) < 2$, to Y ma w^* -FPP (P. M. Soardi, [76]). Ponadto przykład pochodzący od T. C. Lima [54] pokazuje, że oszacowanie to jest dokładne.

Chociaż we wspomnianym wyżej twierdzeniu Soardiego nie jest to wyraźnie zaznaczone, autor zakłada, że zarówno przestrzeń ℓ_1 jak i Y wyposażone są w topologię słabą* generowaną przez c_0 . Ponieważ Y nie musi być przestrzenią dualną, powyższe podejście nie pozwala na rozważanie prawdziwej w^* -FPP. W celu uniknięcia tej niepożądaney sytuacji zdecydowaliśmy się na wprowadzenie innej definicji stabilnej w^* -FPP (patrz [CMPP2018], Definition 3.2): mówimy, że przestrzeń X^* ma *stabilną* $\sigma(X^*, X)$ -FPP, jeśli istnieje $\gamma > 1$ taka, że Y^* ma $\sigma(Y^*, Y)$ -FPP o ile $d(X, Y) < \gamma$.

Przypomnijmy, że ośrodkowe przestrzenie Lindenstraussa, dla których dualne mają słabą* własność punktu stałego, zostały scharakteryzowane w Twierdzeniu 3.7. Przytoczymy je tutaj w nieco zmienionej postaci, bliższej w swej wymowie własnościom polyhedralnym, do których wrócimy w następnym rozdziale:

Twierdzenie 5.1 ([CMPP2018], Theorem 2.1). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Lindenstraussa. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (i) X^* ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP.
- (ii) Nie istnieje nieskończony zbiór $C \subset \text{ext}(B_{X^*})$ taki, że $\overline{\text{conv}(C)}^* \subset S_{X^*}$.

Wiemy, że jeśli X jest ośrodkową przestrzenią Lindenstraussa, dla której X^* nie jest ośrodkowa, to X^* nie ma w^* -FPP. Wobec tego jedynym interesującym nas przypadkiem są predualne przestrzeni ℓ_1 .

Głównym wynikiem w pracy [CMPP2018] jest następujące

Twierdzenie 5.2 ([CMPP2018], Theorem 3.5). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (i) ℓ_1 ma stabilną $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP.
- (ii) $(\text{ext}(B_{\ell_1}))' \subset rB_{\ell_1}$ dla pewnego $0 \leq r < 1$.

Należy tutaj zaznaczyć, że wykazanie Twierdzeń 5.2 i 3.7 wymagało użycia dwóch zupełnie innych technik dowodzenia.

Główna idea w dowodzie implikacji (i) $\Rightarrow$ (ii) w Twierdzeniu 5.2 polega na modelowaniu kształtu kuli w taki sposób, aby bez znajomości konkretnego wzoru na normę można było stwierdzić, że pewne przekształcenie bez punktu stałego jest nieoddalające. Natomiast w dowodzie implikacji (ii) $\Rightarrow$ (i) kluczową rolę odegrały techniki wprowadzone przez Soardiego w pracy [76] oraz następujący lemat:

Lemat 5.3 ([CMPP2018], Lemma 3.3). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 .*

- (a) *Dla każdego ciągu $\{x_n^*\} \subset \ell_1$ zbieżnego po współrzędnych do x_0^* i takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_0^*\|$ istnieje, spełniony jest warunek*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_m^*\| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_0^*\|.$$

Jeśli dodatkowo $(\text{ext}(B_{\ell_1}))' \subset rB_{\ell_1}$ dla pewnego $0 \leq r < 1$, to:

- (b) *dla każdego ciągu $\{x_n^*\} \subset \ell_1$, który jest $\sigma(\ell_1, X)$ -zbieżny do x^* oraz zbieżny po współrzędnych do 0, mamy*

$$\|x^*\| \leq r \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\|;$$

- (c) *dla każdego ciągu $\{x_n^*\} \subset \ell_1$, który jest $\sigma(\ell_1, X)$ -zbieżny do x^* , z dokładnością do podciągu, mamy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x^*\| \leq \frac{1+r}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_m^*\|.$$

Przejdziemy teraz do omówienia ilościowych aspektów stabilnej słabej* własności punktu stałego. W tym celu dla każdej przestrzeni Banacha X , dla której X^* ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP, wprowadzimy następującą stałą stabilności:

$$\gamma^*(X) = \sup \{ \gamma > 0 : d(X, Y) \leq \gamma \Rightarrow Y^* \text{ ma } \sigma(Y^*, Y)\text{-FPP} \}.$$

Jak się za chwilę przekonamy, dla dowolnej predualnej X przestrzeni ℓ_1 wartość stałej $\gamma^*(X)$ zależy jedynie od promienia $r^*(X)$ najmniejszej kuli zawierającej wszystkie $\sigma(\ell_1, X)$ -punkty skupienia zbioru punktów ekstremalnych kuli B_{ℓ_1} :

$$r^*(X) = \inf \{ r > 0 : (\text{ext}(B_{\ell_1}))' \subset r B_{\ell_1} \}.$$

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$ w Twierdzeniu 5.2 pokazuje, że jeśli $d(Y, X) < \frac{2}{1+r}$, to Y^* ma $\sigma(Y^*, Y)$ -FPP. Zatem

$$\gamma^*(X) \geq \frac{2}{1 + r^*(X)}.$$

Ponadto, jeśli $r^*(X) = 1$, to, korzystając z implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ w Twierdzeniu 5.2, otrzymujemy $\gamma^*(X) = 1$. Jeśli $r^*(X) = 0$, to X jest izometryczna z c_0 . Wobec tego, przykład pochodzący od T. C. Lima [54] pokazuje, że w tym przypadku $\gamma^*(X) = 2$.

Podobnie jak to uczyniliśmy w pracy [CMPP2017], zmienimy teraz notację dla hiperpłaszczyzn w przestrzeni c . Mianowicie, dla każdego $e^* = (e^*(1), e^*(2), \dots) \in B_{\ell_1}$ definiujemy

$$W_{e^*} = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) \in c : \lim_{i \rightarrow \infty} x(i) = \sum_{i=1}^{\infty} e^*(i)x(i) \right\}.$$

Zbiór W_{e^*} jest hiperpłaszczyzną w c ,

$$W_{e^*} = \{ x \in c : f(x) = 0 \} = \left\{ x \in c : f(1) \lim_{i \rightarrow \infty} x(i) + \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1)x(i) = 0 \right\},$$

gdzie

$$f = \left(-\frac{1}{1 + \|e^*\|_{\ell_1}}, \frac{e^*(1)}{1 + \|e^*\|_{\ell_1}}, \frac{e^*(2)}{1 + \|e^*\|_{\ell_1}}, \dots, \frac{e^*(i)}{1 + \|e^*\|_{\ell_1}}, \dots \right) \in S_{\ell_1}.$$

Na mocy Twierdzenia 2.3,

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_{e^*})} e^*.$$

Główny wynik w pracy [CMPP2017] stanowią Stwierdzenia 5.4, 5.5 i 5.6 zaprezentowane poniżej. Przez $\|\cdot\|_{\infty}$ i $|\cdot|_{\ell_1}$ oznaczamy tutaj, odpowiednio, standardową normę w c i ℓ_1 .

Stwierdzenie 5.4 ([CMPP2017], Prop. 2.2). *Niech $e^* = (e^*(1), \dots, e^*(n), 0, 0, \dots) \in \ell_1$ i $r_n := |e^*|_{\ell_1} \in (0, 1)$. Dla każdego $x \in W_{e^*}$ połóżmy*

$$\|x\|_n = \left(\|R_n x^+\|_{\infty} \vee r_n \|R_n x^-\|_{\infty} + \|R_n x^-\|_{\infty} \vee r_n \|R_n x^+\|_{\infty} \right) \vee (1 + r_n) \|P_n x\|_{\infty}.$$

Wtedy

$$(W_{e^*}, \|\cdot\|_n)^* = (\ell_1, |\cdot|_n),$$

gdzie

$$|f|_n = \max \left\{ \frac{r_n |R_n f^+|_{\ell_1} + |R_n f^-|_{\ell_1}}{1 + r_n}, \frac{|R_n f^+|_{\ell_1} + r_n |R_n f^-|_{\ell_1}}{1 + r_n} \right\} + \frac{|P_n f|_{\ell_1}}{1 + r_n},$$

a izometryczny izomorfizm $\phi : (\ell_1, |\cdot|_n) \rightarrow (W_{e^*}, \|\cdot\|_n)^*$ dany jest wzorem:

$$(\phi(f))(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)f(j),$$

gdzie $f = (f(1), f(2), \dots) \in \ell_1$ i $x = (x(1), x(2), \dots) \in W_{e^*}$.

Stwierdzenie 5.5 ([CMPP2017], Prop. 2.3). *Niech $e^* = (e^*(1), \dots, e^*(n), 0, 0, \dots) \in \ell_1$ i $r_n := |e^*|_{\ell_1} \in (0, 1)$. Wtedy $(W_{e^*}, \|\cdot\|_n)^* = (\ell_1, |\cdot|_n)$ nie ma w^* -FPP.*

Stwierdzenie 5.6 ([CMPP2017], Prop. 2.4). *Jeśli X jest predualną przestrzenią ℓ_1 z $r^*(X) \in (0, 1)$, to $\gamma^*(X) \leq \frac{2}{1+r^*(X)}$.*

W dowodzie głównego wyniku przydatny był również następujący techniczny lemat, będący konsekwencją wyników zawartych w pracy Ostrowskiego [67] (pozwolił nam na pominięcie konkretnych wzorów na izomorfizmy, co skróciło zapisy w dowodzie głównego wyniku w pracy):

Lemat 5.7 ([CMPP2017], Lemma 2.1). *Niech $\{x_n^*\} \subset X^*$ będzie ciągiem zbieżnym w sensie normy do x^* . Wtedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\ker x^*, \ker x_n^*) = 1.$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę Twierdzenie 5.2 oraz Stwierdzenie 5.6 (wraz ze Stwierdzeniami 5.4 oraz 5.5), otrzymujemy dokładną wartość stałej $\gamma^*(X)$, dla każdej z osobna ℓ_1 -predualnej X :

Twierdzenie 5.8 ([CMPP2017], Theorem 2.5). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Jeżeli ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP, to*

$$\gamma^*(X) = \frac{2}{1 + r^*(X)}.$$

Należy tutaj podkreślić, że technika dowodzenia implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ w Twierdzeniu 5.2 jest zupełnie inna niż ta zaprezentowana w dowodach Stwierżeń 5.4-5.6.

W dalszej części pracy [CMPP2017] rozważamy stabilność słabej* własności punktu stałego w ograniczonych ramach ℓ_1 -predualnych. Mianowicie, dla predualnej X przestrzeni ℓ_1 spełniającej $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP, jesteśmy zainteresowani oszacowaniem następującej stałej:

$$\eta^*(X) = \sup \{ \eta > 0 : Y^* = \ell_1, d(X, Y) \leq \eta \Rightarrow Y^* \text{ ma } \sigma(\ell_1, Y)\text{-FPP} \}.$$

Dokładną wartość stałej $\eta^*(X)$ otrzymaliśmy w przypadku, gdy $X = c_0$. Zauważmy najpierw, że $\eta^*(c_0) \leq 3$, co jest natychmiastową konsekwencją wyniku M. Camberna [19] mówiącego, że $d(c_0, c) = 3$. Ponieważ dla dowolnej ℓ_1 -predualnej X mamy $\gamma^*(X) \leq \eta^*(X)$, to $2 \leq \eta^*(c_0) \leq 3$. Okazuje się, że $\eta^*(c_0) = 3$:

Twierdzenie 5.9 ([CMPP2017], Theorem 3.7). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 izomorficzną z c_0 . Przypuśćmy, że X^* nie ma w^* -FPP. Jeśli $T : X \rightarrow c_0$ jest izomorfizmem z $\|T^{-1}\| = 1$, to $\|T\| \geq 3$.*

W dowodzie powyższego wyniku wykorzystaliśmy Twierdzenie 3.7, Stwierdzenie 3.5 oraz następujące

Stwierdzenie 5.10 ([CMPP2017], Prop. 3.4). *Niech X będzie przestrzenią Banacha zawierającą izometryczną kopię przestrzeni c i niech $T : c_0 \rightarrow X$ będzie operatorem liniowym "na" z $\|T\| = 1$. Jeśli $\tilde{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ oznacza przekształcenie dane wzorem $T = \tilde{T}\pi$, gdzie $\pi : X \rightarrow X/\ker T$ jest przekształceniem ilorazowym, to $\|\tilde{T}^{-1}\| \geq 3$.*

W dowodzie Stwierdzenia 5.10 kluczową rolę odegrał wynik z pracy D. E. Alspacha [1] oraz Y. Gordona ([37], Theorem 2.1).

Istnieje wiele ℓ_1 -predualnych X , dla których ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP i $d(X, c_0) = 3$. W przykładzie, który zaprezentujemy tutaj, skorzystamy z następującego wyniku:

Stwierdzenie 5.11 ([CMPP2017], Prop. 3.8). *Jeśli $\alpha \in S_{\ell_1}$, to $d(c_0, W_\alpha) = 3$.*

Przykład 4 ([CMPP2017], Example 3.9). Niech $\alpha = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots) \in S_{\ell_1}$. Wówczas przestrzeń W_α jest ℓ_1 -predualną oraz $d(c_0, W_\alpha) = 3$ (Stwierdzenie 5.11). Ponadto, ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_\alpha)$ -FPP (Stwierdzenie 3.1).

Analiza dowodu Stwierdzenia 5.11 pokazuje, że $d(W_\alpha, c_0) \leq 1 + 2|\alpha|_{\ell_1}$ dla każdego $\alpha \in B_{\ell_1}$. Nierówność ta wraz ze Stwierdzeniem 5.11 oraz Twierdzeniem 5.2 pozwalają nam na scharakteryzowanie stałej stabilności $\gamma^*(W_\alpha)$ w terminach odległości Banacha-Mazura $d(W_\alpha, c_0)$:

Wniosek 5.12 ([CMPP2017], Corollary 3.10). *Niech $\alpha \in B_{\ell_1}$ będzie takie, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_\alpha)$ -FPP. Wówczas $\gamma^*(W_\alpha) > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(W_\alpha, c_0) < 3$.*

6. GEOMETRYCZNE RÓWNOWAŻNIKI WŁASNOŚCI POLYHEDRALNYCH DLA ℓ_1 -PREDUALNYCH

Po ukazaniu się pracy Klee'ego polyhedralność była szeroko badana i wprowadzono kilka różnych definicji. W obrębie przestrzeni Lindenstraussa X możemy wyróżnić następujące:

- (pol-i): $(\text{ext}(B_{X^*}))' \subset \{0\}$ ([60]);
- (pol-ii): $(\text{ext}(B_{X^*}))' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 < r < 1$ ([24]);
- (pol-iii): $(\text{ext}(B_{X^*}))' \subset \text{int}(B_{X^*})$ ([24]);
- (pol-iv): nie istnieje nieskończony zbiór $C \subset \text{ext}(B_{X^*})$ taki, że $\overline{\text{conv}(C)}^* \subset S_{X^*}$ (własność (pol-iii) w [CMPP2018]);
- (pol-v): nie istnieje nieskończenie wymiarowy słabo* domknięty właściwy fejs kuli B_{X^*} ([50]);
- (pol-vi): $x^*(x) < 1$ jeśli tylko $x \in S_X$ i $x^* \in (\text{ext}(B_{X^*}))'$ ([26]);
- (pol-vii): zbiór $\text{ext}(D(x))$ jest skończony dla każdego $x \in S_X$ (własność (Δ) w [24]);
- (pol-viii): $\sup \{x^*(x) : x^* \in \text{ext}(B_{X^*}) \setminus D(x)\} < 1$ dla każdego $x \in S_X$ ([15]);
- (pol-K): kula jednostkowa dowolnej skończonej wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni X jest wielościanem ([47]).

Ponadto, rozważymy następujące własności przestrzeni X i jej dualnej X^* :

- w^* -NS: X^* ma słabą* strukturę normalną (w skrócie, $\sigma(X^*, X)$ -NS lub w^* -NS), jeśli każdy wypukły, $\sigma(X^*, X)$ -zwarty zbiór $C \subset X^*$ o dodatniej średnicy ma punkt *niediametralny*, tzn. istnieje $x^* \in C$ taki, że

$$\sup \{\|x^* - y^*\| : y^* \in C\} < \text{diam}(C) := \sup \{\|x^* - y^*\| : x^*, y^* \in C\}$$

(patrz [14] i [72]).

- w^* -KK: X^* ma słabą* własność Kadeca-Klee (w skrócie, $\sigma(X^*, X)$ -KK lub w^* -KK), jeśli dla każdego ciągu (x_n^*) w S_{X^*} , który jest $\sigma(X^*, X)$ -zbieżny do $x^* \in S_{X^*}$, mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x^*\| = 0$.

- w^* -UKK: X^* ma *jednostajną słabą* własność Kadeca-Klee* (w skrócie, $\sigma(X^*, X)$ -UKK lub w^* -UKK), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli ciąg (x_n^*) w B_{X^*} jest $\sigma(X^*, X)$ -zbieżny do x^* i

$$\text{sep} \{x_n^*\} := \inf \{\|x_n^* - x_m^*\| : n \neq m\} > \varepsilon,$$

to $\|x^*\| < 1 - \delta$.

- w^* -GGLD: X^* ma *uogólnioną słabą* własność Gosseza-Lami Dozo* (w skrócie, $\sigma(X^*, X)$ -GGLD lub w^* -GGLD), jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\| < \lim_{n, m; n \neq m} \|x_n^* - x_m^*\|$$

dla każdego ciągu (x_n^*) w X^* $\sigma(X^*, X)$ -zbieżnego do 0, dla którego obie granice istnieją i $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\| \neq 0$ (patrz [40] oraz ([10], Definition 3)).

- w^* -O: X^* ma *słabą* własność Opiala* (w skrócie, $\sigma(X^*, X)$ -O lub w^* -O), jeśli

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^* + x_n^*\|$$

dla każdego ciągu (x_n^*) w X^* $\sigma(X^*, X)$ -zbieżnego do 0 i każdego $x^* \neq 0$ (patrz [66] i [72]).

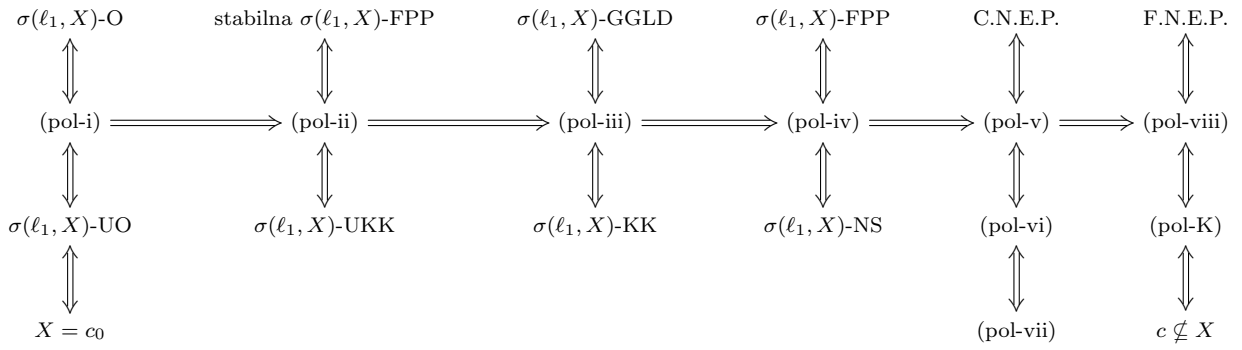
- w^* -UO: X^* ma *jednostajną słabą* własność Opiala* (w skrócie, $\sigma(X^*, X)$ -UO lub w^* -UO), jeśli dla każdego $c > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że

$$1 + r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^* + x_n^*\|$$

dla każdego $x^* \in X^*$ z $\|x^*\| \geq c$ i każdego ciągu (x_n^*) w X^* $\sigma(X^*, X)$ -zbieżnego do 0, dla którego $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\| \geq 1$ (patrz [71] i [72]).

- F.N.E.P.: X ma *własność rozszerzania dla operatorów skończenie wymiarowych* (w skrócie F.N.E.P. od angielskiej nazwy *the finite-dimensional norm-preserving extension property* for bounded operators with a finite dimensional range), jeśli dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i dla każdego ograniczonego operatora $T : Y \rightarrow X$ z $\dim(T(X)) < \infty$ istnieje rozszerzenie $\tilde{T} : Z \rightarrow X$ z $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ i $\dim(\tilde{T}(Z)) < \infty$ (patrz [58]).
- C.N.E.P.: X ma *własność rozszerzania dla operatorów zwartych* (w skrócie, C.N.E.P. od angielskiej nazwy *the compact norm-preserving extension property* for compact operators), jeśli dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i dla każdego operatora zwartego $T : Y \rightarrow X$ istnieje zwarte rozszerzenie $\tilde{T} : Z \rightarrow X$ z $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ (patrz [58]).

Niech X będzie ℓ_1 -predualną. Poniższy diagram przedstawia wszystkie relacje pomiędzy różnymi własnościami polyhedralnymi przestrzeni X , C.N.E.P., F.N.E.P. jak również w^* -NS, w^* -FPP, w^* -GGLD, w^* -KK, stabilną w^* -FPP, w^* -UKK, w^* -O oraz w^* -UO w przestrzeni dualnej.



Implikacje $(X = c_0) \Rightarrow \sigma(\ell_1, X)\text{-UO} \Rightarrow \sigma(\ell_1, X)\text{-O} \Rightarrow (\text{pol-i}) \Rightarrow (\text{pol-ii}) \Rightarrow (\text{pol-iii}) \Rightarrow (\text{pol-iv}) \Rightarrow (\text{pol-v})$ oraz $(\text{pol-vi}) \Rightarrow (\text{pol-vii})$ są łatwe do wykazania. Implikacja $(\text{pol-i}) \Rightarrow (X = c_0)$ wynika z ([21], Proposition 2). Implikacja $(\text{pol-K}) \Rightarrow (c \notin X)$ wynika z faktu, że c nie jest polyhedralem. Równoważność $\text{F.N.E.P.} \Leftrightarrow (\text{pol-K})$ została wykazana w ([58], Proposition 2). Implikację $(\text{pol-v}) \Rightarrow \text{C.N.E.P.}$ wykazano w ([50], Theorem 3). Implikacja $(\text{pol-viii}) \Rightarrow (\text{pol-K})$ zachodzi dla dowolnej przestrzeni Banacha (patrz [21], Theorem 1). Implikacja $(\text{pol-v}) \Rightarrow (\text{pol-vi})$ wynika z ([26], Twierdzenia 1.2). Implikacja $\text{C.N.E.P.} \Rightarrow (\text{pol-K})$ została wykazana w [58]. Implikacja $\sigma(\ell_1, X)\text{-FPP} \Rightarrow (\text{pol-iv})$ wynika z [39].

Implikacja $(\text{pol-iv}) \Rightarrow \sigma(\ell_1, X)\text{-FPP}$ zachodzi na mocy Twierdzenia 3.7 (patrz również Twierdzenie 5.1). Równoważność $[\text{stabilna } \sigma(\ell_1, X)\text{-FPP} \Leftrightarrow (\text{pol-ii})]$ jest treścią Twierdzenia 5.2 oraz Twierdzenia 5.8. Implikacje $(c \notin X) \Rightarrow (\text{pol-K})$ i $(\text{pol-K}) \Rightarrow (\text{pol-viii})$ zachodzą na mocy Twierdzenia 4.4. Implikacja $(\text{C.N.E.P.}) \Rightarrow (\text{pol-vii})$ wynika z Twierdzenia 4.7. Implikacja $(\text{pol-vii}) \Rightarrow (\text{pol-v})$ jest konsekwencją następującego lematu:

Lemat 6.1 ([CMPP2018], Lemma 4.3). *Niech X będzie przestrzenią Lindenstraussa i niech F będzie $\sigma(X^*, X)$ -domkniętym właściwym fejsem kuli B_{X^*} . Wtedy istnieje $x \in S_X$ taki, że $F \subset D(x)$.*

Równoważności $\sigma(\ell_1, X)\text{-UKK} \Leftrightarrow (\text{pol-ii})$, $\sigma(\ell_1, X)\text{-NS} \Leftrightarrow (\text{pol-iv})$ i $\sigma(\ell_1, X)\text{-KK} \Leftrightarrow (\text{pol-iii}) \Leftrightarrow \sigma(\ell_1, X)\text{-GGLD}$ są treścią Stwierżeń 6.2-6.3 oraz Twierdzenia 6.4 zaprezentowanych poniżej.

Stwierdzenie 6.2 ([P2018], Proposition 2.1). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (1) ℓ_1 ma własność $\sigma(\ell_1, X)\text{-UKK}$.
- (2) $(\text{ext}(B_{\ell_1}))' \subseteq rB_{\ell_1}$ dla pewnego $0 < r < 1$.

Stwierdzenie 6.2 wraz z Twierdzeniem 5.2 pokazują, że dla przestrzeni ℓ_1 z predualną X , stabilna $\sigma(\ell_1, X)\text{-FPP}$ jest równoważna $\sigma(\ell_1, X)\text{-UKK}$.

Stwierdzenie 6.3 ([P2018], Proposition 2.2). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (1) ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)\text{-NS}$.
- (2) Nie istnieje nieskończony zbiór $C \subset \text{ext}(B_{\ell_1})$ taki, że $\overline{\text{conv}(C)}^* \subset S_{\ell_1}$.

Stwierdzenie 6.3 wraz z Twierdzeniem 3.7 (patrz również Twierdzenie 5.1) pokazują, że przestrzeń ℓ_1 , z predualną X , ma $\sigma(\ell_1, X)\text{-FPP}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma $\sigma(\ell_1, X)\text{-NS}$.

Twierdzenie 6.4 ([P2018], Theorem 2.3). *Niech X będzie predualną przestrzenią ℓ_1 . Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (1) ℓ_1 ma własność $\sigma(\ell_1, X)\text{-KK}$.

- (2) ℓ_1 ma własność $\sigma(\ell_1, X)$ -GGLD.
 (3) $(\text{ext}(B_{\ell_1}))' \subset \text{int}(B_{\ell_1})$.
 (4) Dla każdego ciągu (x_n^*) w ℓ_1 takiego, że (x_n^*) jest $\sigma(\ell_1, X)$ -zbieżny do x^* i (x_n^*) jest zbieżny do 0 po współrzędnych oraz $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\| > 0$, mamy

$$\|x^*\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\|.$$

Twierdzenie 6.4 odegra ważną rolę w Przykładach 9-10 omawianych w rozdziale 7.

Zakończymy ten rozdział przykładami pokazującymi, że żadna z jednokierunkowych implikacji w naszym diagramie nie może zostać odwrócona. Wykorzystamy w tym celu omawiane już wcześniej hiperpłaszczyzny w przestrzeni c : dla $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots) \in B_{\ell_1}$ niech

$$W_\alpha = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) \in c : \lim_{i \rightarrow \infty} x(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)x(i) \right\}.$$

Przykład 5 ([CMPP2018], Example 4.7). Niech $\alpha = (r/2, r/2, 0, 0, \dots) \in \ell_1$ dla $0 < r < 1$. Wówczas (e_n^*) jest $\sigma(\ell_1, W_\alpha)$ -zbieżny do α , co pokazuje, że $[(\text{pol-ii}) \not\Rightarrow (\text{pol-i})]$.

Przykład 6 ([CMPP2018], Example 4.8). Niech $\alpha = (-1/2, -1/4, -1/8, \dots) \in \ell_1$. Wtedy W_α ma własność (pol-iv) ale (e_n^*) jest $\sigma(\ell_1, W_\alpha)$ -zbieżny do $\alpha \in S_{\ell_1}$. Zatem $[(\text{pol-iv}) \not\Rightarrow (\text{pol-iii})]$.

Przykład 7 ([CMPP2018], Example 4.9). Niech $\alpha = (1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \dots) \in \ell_1$. Wtedy W_α ma własność (pol-v). Jednakże, rozważając zbiór $C = \{e_1^*, e_3^*, e_5^*, \dots\}$ możemy łatwo zaobserwować, że W_α nie ma własności (pol-iv). Zatem $[(\text{pol-v}) \not\Rightarrow (\text{pol-iv})]$.

Przykład 8 ([CMPV2016], Section 3). Niech $\alpha = (1/2, 1/4, 1/8, \dots) \in \ell_1$. Wtedy W_α ma własność (pol-viii) ale nie ma (pol-v). Zatem $[(\text{pol-viii}) \not\Rightarrow (\text{pol-v})]$.

Ponadto, Przykłady 9 oraz 10 w rozdziale 7 pokazują, że $[(\text{pol-iii}) \not\Rightarrow (\text{pol-ii})]$.

7. O ℓ_1 -PREDUALNYCH ODLEGŁYCH O 1

Przypomnijmy, że dualna X^* przestrzeni X nie ma stabilnej $\sigma(X^*, X)$ -FPP, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń Y taka, że Y^* nie ma $\sigma(Y^*, Y)$ -FPP i $d(X, Y) \leq 1 + \varepsilon$. Oczywiście słaba* własność punktu stałego jest izometrycznie niezmiennicza tzn. jeśli X^* ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP, to to samo jest prawdą dla dowolnej przestrzeni Y^* , o ile Y jest izometryczna z X . Jednak fakt, że $d(X, Y) = 1$ nie oznacza, że X i Y są izometryczne. Pierwszy przykład takich przestrzeni został podany przez Czesława Bessagę i Aleksandra Pełczyńskiego [68]. Wobec tego zasadne jest następujące pytanie:

Czy istnieją przestrzenie Banacha X i Y takie, że X^ ma $\sigma(X^*, X)$ -FPP, Y^* nie ma $\sigma(Y^*, Y)$ -FPP i $d(X, Y) = 1$?*

W rzeczywistości problem ten zapoczątkował nową ścieżkę badań związaną z subtelniejszym podejściem do ogólnie pojętego zagadnienia braku stabilności geometrycznych własności przestrzeni Banacha (patrz [P2018]). Mianowicie, będziemy mówili, że dana własność $\mathcal{P}$ nie jest niezmiennicza przy odległości Banacha-Mazura 1, jeśli istnieją dwie przestrzenie Banacha X i Y takie, że X ma własność $\mathcal{P}$, Y nie ma tej własności i $d(X, Y) = 1$. Ponadto, będziemy mówili, że własność $\mathcal{P}$ jest niezmiennicza przy odległości Banacha-Mazura 1, jeśli dla dowolnej pary przestrzeni X i Y z $d(X, Y) = 1$, X ma własność $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy Y ma własność $\mathcal{P}$.

Główne wyniki w pracy [P2018] dotyczą ośrodkowych przestrzeni Lindenstraussa. Najpierw podajemy kilka geometrycznych równoważników dla własności polyhedralnych ℓ_1 -predualnych (patrz Stwierdzenie 6.2, Stwierdzenie 6.3 i Twierdzenie 6.4 w poprzednim

rozdziale). Następnie pokazujemy, że nawet w zawężonej klasie ℓ_1 -predualnych, większość własności polyhedralnych (oznaczonych przez (pol-iii)-(pol-viii) i (pol-K)) oraz ich geometryczne równoważniki (patrz diagram w poprzednim rozdziale) nie są niezmiennicze przy odległości Banacha-Mazura 1 (patrz Przykłady 9-10). W tym kontekście użyteczny będzie następujący

Lemat 7.1 ([P2018], Lemma 3.1). *Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem przestrzeni Banacha izomorficznych z przestrzenią Banacha X i spełniających warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 1$. Niech*

$$Y = \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right)_{c_0} \quad i \quad Z = \left(X \oplus \sum_{n=2}^{\infty} X_{n-1} \right)_{c_0}.$$

Wówczas $d(Y, Z) = 1$. Ponadto, konkluzja ta pozostaje prawdziwa jeśli zastąpimy c_0 -sumę prostą przez ℓ_p -sumę prostą z $1 \leq p \leq \infty$.

Przykład 9 ([P2018], Example 3.2). Niech $x^* = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_1$. Przestrzenie X i Y definiujemy jako c_0 -sumy proste odpowiednich hiperpłaszczyzn w przestrzeni c :

$$X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} W_{\frac{n}{n+1}} x^* \right)_{c_0}, \quad Y = \left(W_{x^*} \oplus \sum_{n=2}^{\infty} W_{\frac{n-1}{n}} x^* \right)_{c_0}.$$

Wtedy $X^* = (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_1)_{\ell_1} = \ell_1$, $Y^* = (\ell_1 \oplus \sum_{n=2}^{\infty} \ell_1)_{\ell_1} = \ell_1$ oraz

$$(\text{ext}(B_{X^*}))' = \{(0, 0, \dots)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \pm \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{n}{n+1} x^*, 0, 0, \dots \right) \right\} \subset \text{int}(B_{\ell_1}).$$

Zatem, na mocy Twierdzenia 3.7, ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP. Jednakże można powiedzieć więcej. Mianowicie, Twierdzenie 6.4 pokazuje, że ℓ_1 ma własność $\sigma(\ell_1, X)$ -KK. W konsekwencji, korzystając z ([39], Theorem 5), ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$ -FPP dla przekształceń typu asymptotycznie nieoddalającego; przypomnijmy, że przekształcenie $T : C \rightarrow C$ jest typu asymptotycznie nieoddalającego, jeśli T^N jest ciągle dla pewnego $N \in \mathbb{N}$ i

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sup \{ \|T^n(x) - T^n(y)\| - \|x - y\| : y \in C \}) \leq 0$$

dla każdego $x \in C$. Oczywiście, każde przekształcenie nieoddalające jest typu asymptotycznie nieoddalającego. Z drugiej strony, W_{x^*} jest izometrycznie izomorficzna z c i wobec tego Y nie ma własności (pol-K). Ponadto, na mocy Twierdzenia 3.7, ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, Y)$ -FPP dla przekształceń kontrakcyjnych.

Wykażemy, że $d(X, Y) = 1$. W tym celu, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, definiujemy przekształcenie $\psi_n : W_{\frac{n}{n+1}} x^* \rightarrow W_{x^*}$ wzorem:

$$\psi_n(x(1), x(2), \dots) = \left(\frac{n}{n+1} x(1), x(2), x(3), \dots \right).$$

Łatwo sprawdzić, że ψ_n jest izomorfizmem z $W_{\frac{n}{n+1}} x^*$ na W_{x^*} , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\| \|\psi_n^{-1}\| = 1$, a więc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(W_{\frac{n}{n+1}} x^*, W_{x^*}) = 1$. Korzystając z Lematu 7.1, dostajemy $d(X, Y) = 1$.

Przykład 10 ([P2018], Example 3.3). Niech $x_1^* = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, $x_3^* = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots)$ i $x_4^* = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots)$. Dla $i = 1, 2, 3, 4$ definiujemy

$$X_i = \left(\sum_{n=1}^{\infty} W_{\frac{n}{n+1}} x_i^* \right)_{c_0} \quad i \quad \widetilde{X}_i = \left(W_{x_i^*} \oplus \sum_{n=2}^{\infty} W_{\frac{n-1}{n}} x_i^* \right)_{c_0}.$$

Wtedy $X_i^* = (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_1)_{\ell_1} = \ell_1$ i $\widetilde{X}_i^* = (\ell_1 \oplus \sum_{n=2}^{\infty} \ell_1)_{\ell_1} = \ell_1$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Następnie, dla każdego $n \geq 1$ definiujemy przekształcenie $\psi_{i,n} : W_{\frac{n}{n+1}x_i^*} \rightarrow W_{x_i^*}$ wzorem:

$$\psi_{1,n}(x(1), x(2), \dots) = \left(\frac{n}{n+1}x(1), x(2), x(3), \dots \right)$$

i dla $i = 2, 3, 4$

$$\psi_{i,n}(x(1), x(2), \dots) = \left(x(1) - \frac{2}{n} \lim_{i \rightarrow \infty} x(i), x(2), x(3), \dots \right).$$

Wówczas każde przekształcenie $\psi_{i,n}$ jest izomorfizmem, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{i,n}\| \|\psi_{i,n}^{-1}\| = 1$, a więc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(W_{\frac{n}{n+1}x_i^*}, W_{x_i^*}) = 1$. Wobec tego, na mocy Lematu 7.1, $d(X_i, \widetilde{X}_i) = 1$. Ponadto, dla $i = 1, 2, 3, 4$ mamy

$$(\text{ext}(B_{X_i^*}))' = \{(0, 0, \dots)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \pm \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}, \frac{n}{n+1}x_i^*, 0, 0, \dots \right\},$$

$$(\text{ext}(B_{\widetilde{X}_i^*}))' = \{(0, 0, \dots)\} \cup \{\pm(x_i^*, 0, 0, \dots)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \pm \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}, \frac{n-1}{n}x_i^*, 0, 0, \dots \right\}.$$

Niech

$$Y_1 = (\widetilde{X}_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4)_{\infty}, Y_2 = (X_1 \oplus \widetilde{X}_2 \oplus X_3 \oplus X_4)_{\infty},$$

$$Y_3 = (X_1 \oplus X_2 \oplus \widetilde{X}_3 \oplus X_4)_{\infty}, Y_4 = (X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus \widetilde{X}_4)_{\infty},$$

$$Y_5 = (X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4)_{\infty}.$$

Łatwo sprawdzić, że następujące stwierdzenia są prawdziwe (patrz diagram w rozdziale 6).

- $Y_i^* = \ell_1$ i $d(Y_i, Y_j) = 1$ dla $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Y_1 nie ma własności (pol-K) ponieważ $W_{x_1^*}$ jest izometryczna z c .
- Na mocy Twierdzenia 4.1 (patrz również Wniosek 4.2), przestrzeń Y_2 nie zawiera izometrycznej kopii c . Wobec tego Y_2 ma własność (pol-K). Jednakże Y_2 nie ma własności (pol-v).
- Y_3 ma własność (pol-v) ale nie ma (pol-iv).
- Y_4 ma własność (pol-iv) ale nie ma (pol-iii).
- Y_5 ma własność (pol-iii).

Druga część pracy [P2018] dotyczy ogólnego przypadku przestrzeni Banacha. Wskazujemy tam inne geometryczne własności, które nie są niezmiennicze przy odległości Banacha-Mazura 1 i odgrywają ważną rolę w *Analizie Matematycznej*, a w szczególności w *Metrycznej Teorii Punktu Stałego*. Należą do nich: jednostajna wypukłość w każdym kierunku (UCED), lokalna jednostajna wypukłość (LUR), gładkość, (słaba*) własność Opiala, własność Kadeca-Klee, struktura normalna oraz słaba własność punktu stałego dla przekształceń nieoddalających. Z drugiej strony, jednostajna wypukłość, jednostajna gładkość, jednostajna własność Opiala oraz jednostajna własność Kadeca-Klee są niezmiennicze przy odległości Banacha-Mazura 1.

Ponadto, ponieważ jednostajna słaba* własność Opiala oraz jednostajna słaba* własność Kadeca-Klee są niezmiennicze przy odległości Banacha-Mazura 1, to, w klasie ℓ_1 -predualnych, własności polyhedralne (pol-i) i (pol-ii) również są niezmiennicze przy odległości Banacha-Mazura 1 (patrz diagram w rozdziale 6).

8. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

Moje pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze to 11 artykułów oraz książka.

ARTYKUŁY OPUBLIKOWANE PRZED UZYSKANIEM STOPNIA DOKTORA

- [GP2008] K. Goebel and Ł. Piasecki, *A new estimate for the optimal retraction constant*, Proceedings of the Second International Symposium on Banach and Function Spaces 2006, Kitakyushu, Japan, September 14-17, 2006, pages 77-83, Yokohama Publishers, 2008.
- [P2009] Ł. Piasecki, *Retracting ball onto sphere in $BC_0(\mathbb{R})$* , Topol. Methods Nonlinear Anal. 33 (2009), 307-313.
- [P2011] Ł. Piasecki, *Retracting a ball onto a sphere in some Banach spaces*, Nonlinear Anal. 74 (2011), 396-399.
- [PP2011] V. Pérez-García and Ł. Piasecki, *Lipschitz constants for iterates of mean lipschitzian mappings*, Nonlinear Anal. 74 (16) (2011), 5643-5647.
- [PP2012] V. Pérez-García and Ł. Piasecki, *On mean nonexpansive mappings and the Lifshitz constant*, J. Math. Anal. Appl. 396 (2) (2012), 448-454.

ARTYKUŁY ORAZ KSIĄŻKA OPUBLIKOWANE PO UZYSKANIU STOPNIA DOKTORA

- [P2013] **Ł. Piasecki, *Classification of Lipschitz Mappings*, CRC Press, Taylor & Francis Group, A Chapman & Hall Book, 2013. (książka)**
- [PP2013] V. Pérez-García and Ł. Piasecki, *Spectral radius for mean lipschitzian mappings*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, July 9-18, 2012, Cluj-Napoca, Romania, pages 209-216, House of the Book of Science 2013.
- [P2014] Ł. Piasecki, *Renormings of c_0 and the minimal displacement problem*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A, 68 (2) (2014), 85-91.
- [GP2014] K. Goebel and Ł. Piasecki, *Minimal displacement and related problems, revisited*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, Kitakyushu, Japan, September 12-15, 2012, Yokohama Publishers, 2014.
- [PP2016] V. Pérez-García and Ł. Piasecki, *From mean lipschitzian mappings to a generalized moving averages in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 17 (3) (2016), 589-597.
- [CP2017] E. Casini and Ł. Piasecki, *The minimal displacement and optimal retraction problems in some Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (1) (2017), 61-71.
- [PPS2017] V. Pérez-García, Ł. Piasecki, A. Sánchez Nungaray, *Solving polynomials with Fibonacci type sequences*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2) (2017), 251-259.

8.1. Zagadnienie optymalnej retrakcji i minimalnego przesunięcia. W 1912 roku L. E. J. Brouwer [16] wykazał, że każdy ograniczony, domknięty i wypukły podzbiór C skończenie wymiarowej przestrzeni Banacha X ma *topologiczną własność punktu stałego* tzn. każde ciągłe przekształcenie $T : C \rightarrow C$ ma punkt stały. Wiadomo, że wynik ten ma swój równoważnik mówiący, że sfera jednostkowa S_X w skończenie wymiarowej przestrzeni Banacha X nie jest *retraktem* domkniętej kuli jednostkowej B_X tzn. nie istnieje ciągłe przekształcenie $R : B_X \rightarrow S_X$ (*retrakcja*) takie, że $Rx = x$ dla wszystkich $x \in S_X$. Najpopularniejszy i najbardziej użyteczny wynik rozszerzający twierdzenie Brouwera na przypadek przestrzeni nieskończenie wymiarowych został sformułowany w roku 1930 przez J. P. Schaudera [73] i stanowi, że każdy niepusty, wypukły, zwarty podzbiór C przestrzeni Banacha X ma topologiczną własność punktu stałego. Już na tym etapie rodzi się następujące pytanie: co się dzieje w przypadku, gdy C nie jest zbiorem zwartym? Pełna odpowiedź została podana przez Klee'ego w jego pracach z 1953 oraz 1955 roku [45], [46]. Mianowicie, wykazał on, że dla każdego niezwartego, domkniętego i wypukłego podzbioru C przestrzeni Banacha X , istnieje ciągłe przekształcenie $T : C \rightarrow C$ bez punktu stałego.

Wobec twierdzeń Schaudera i Klee’ego wiemy, że domknięty i wypukły zbiór $C \subset X$ ma topologiczną własność punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty.

Inne podejście do tego zagadnienia zostało zapoczątkowane przez Kazimierza Goebbla w jego pracy z 1973 roku [28], w której podał przykłady przekształceń lipschitzowskich $T : C \rightarrow C$ z *minimalnym przesunięciem*

$$d(T) = \inf \{ \|x - Tx\| : x \in C \} > 0.$$

Dalsze badania w tym kierunku doprowadziły do sformułowania twierdzeń mocniejszych niż wynik Klee’ego. Najpierw, w roku 1979, Nowak [65] wykazał, że dla pewnej klasy przestrzeni Banacha X sfera jest *lipschitzowskim retraktem* kuli, tzn. istnieje retrakcja $R : B_X \rightarrow S_X$ spełniająca z pewną stałą k następujący warunek: $\|Rx - Ry\| \leq k \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in B_X$. Następnie, cztery lata później, Benyamini i Sternfeld [8] wykazali, że to samo jest prawdą dla dowolnej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha. Najmocniejszy wynik został uzyskany przez Lina i Sternfelda w 1985 roku [56]. Wykazali oni, że dla każdego ograniczonego, domkniętego, wypukłego ale niezwartego zbioru C w przestrzeni Banacha X i dla każdego $k > 1$, istnieje k -lipschitzowskie przekształcenie $T : C \rightarrow C$ (tzn. $\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in C$) z $d(T) > 0$. W szczególności, sytuacja ta ma miejsce w przypadku domkniętej kuli jednostkowej B_X w dowolnej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha X tzn. istnieje k -lipschitzowskie przekształcenie $T : B_X \rightarrow B_X$ z $d(T) > 0$. Każde takie przekształcenie może zostać wykorzystane do skonstruowania lipschitzowskiej retrakcji R kuli B_X na S_X (więcej szczegółów można znaleźć np. w książce [27]).

Obecne badania w tej materii skupiają się na dwóch podstawowych problemach: *zagadnieniu optymalnej retrakcji* oraz *minimalnego dystansu*.

Zagadnienie optymalnej retrakcji dotyczy następującego problemu: dla danej przestrzeni Banacha X , podaj dokładną wartość lub dobre oszacowanie *optymalnej stałej retrakcji*:

$$k_0(X) = \inf \{ k : \text{istnieje } k\text{-lipschitzowska retrakcja } R : B_X \rightarrow S_X \}.$$

Jak dotąd, dokładna wartość stałej $k_0(X)$ nie jest znana dla żadnej przestrzeni Banacha X . Przedstawimy teraz najlepsze z obecnie znanych oszacowań.

Wiadomo, że $k_0(X) \geq 3$ dla dowolnej przestrzeni Banacha X (patrz [31]). Jednak dla niektórych przestrzeni znane są nieco lepsze oszacowania, na przykład, K. Bolibok [12] wykazał, że $k_0(\ell_1) \geq 4$, a w [CP2017] pokazano, że dla przestrzeni Hilberta H mamy $k_0(H) > 4.58$. O wiele więcej wysiłku włożono w uzyskanie dobrych oszacowań od góry. W 2007 roku, M. Annoni i E. Casini [4] wykazali, że $k_0(\ell_1) \leq 8$; poprzednie oszacowanie dla tej przestrzeni to $k_0(\ell_1) < 9.43$ (patrz [27]). Wkrótce potem, K. Goebel, G. Marino, L. Muglia i R. Volpe [34] zauważyli, że to samo oszacowanie zachodzi dla przestrzeni $L_1(0, 1)$. Jeszcze inną prostą konstrukcją pokazującą, że $k_0(L_1(0, 1)) \leq 8$ można znaleźć w (Example 9.17, [P2013]). M. Baronti, E. Casini i C. Franchetti [7] wykazali, że dla przestrzeni Hilberta H mamy $k_0(H) \leq 28.99$; poprzednie oszacowania to: $k_0(H) \leq 64.25$ uzyskane przez T. Komorowskiego i J. Wośko [48] oraz $k_0(H) \leq 31.45$ podane przez K. Boliboka [12].

W mojej pracy magisterskiej [69], napisanej pod kierunkiem profesora Kazimierza Goebbla, wykazałem, że dla przestrzeni c_0 , c , $C[0, 1]$ i $BC(\mathbb{R})$ mamy $k_0(X) \leq 4(2 + \sqrt{3}) = 14.92\dots$; poprzednie oszacowanie dla tych przestrzeni wynosiło $k_0(X) \leq 4(1 + \sqrt{2})^2 = 23.31\dots$ (patrz [27] i [34]). Ponadto pokazałem, że $k_0(BC_z(M)) \leq 2(2 + \sqrt{2}) = 6.828\dots$, gdzie (M, d) jest przestrzenią metryczną spójną złożoną z więcej niż jednego punktu, $z \in M$ jest zadany punktem, a $BC_z(M)$ oznacza przestrzeń wszystkich ograniczonych, ciągłych funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ znikających w z , $f(z) = 0$, wyposażoną w standardową normę supremum. (Poprzednie oszacowania dla tej przestrzeni wynosiły kolejno

$k_0(C_0([0, 1])) \leq 15.82$ w [12], $k_0(BC_z(M)) \leq 12$ w [33] i $k_0(BC_z(M)) \leq 7$ w [GP2008]). Jak dotąd, żadne z moich oszacowań nie zostało poprawione. Co więcej, ograniczenie górne $k_0(BC_z(M)) \leq 2(2 + \sqrt{2}) = 6.828 \dots$ wciąż pozostaje najmniejszym spośród wszystkich znanych ograniczeń górnych w obrębie wszystkich przestrzeni Banacha. Moja praca magisterska została nagrodzona w dorocznym konkursie PTM im. Józefa Marcinkiewicza (1910-1940) na najlepszą pracę studencką z dowolnej dziedziny matematyki (druga nagroda). Rezultaty w niej zawarte opublikowałem w czasopiśmie *Topological Methods in Nonlinear Analysis* oraz *Nonlinear Analysis* (patrz [P2009] i [P2011]).

Ostatnio, w artykule [CP2017] wykazano, że $k_0(l_\infty) \leq 12 + 2\sqrt{30} = 22.95 \dots$ oraz podano ogólne oszacowanie optymalnej stałej retrakcji dla pewnych podprzestrzeni przestrzeni funkcyjnych.

Zagadnienie optymalnej retrakcji jest ściśle związane z innym nietrywialnym problemem postawionym przez Kazimierza Goebela w 1973 roku. Przypuśćmy, że C jest ograniczonym, domkniętym, wypukłym i niezwartym podzbiorem przestrzeni Banacha X . *Minimalnym przesunięciem* przekształcenia $T : C \rightarrow C$ nazywamy liczbę

$$d(T) = \inf \{ \|x - Tx\| : x \in C \}.$$

Natomiast funkcję $\varphi_C : [1, +\infty) \rightarrow [0, \text{diam}(C)]$ daną wzorem

$$\varphi_C(k) = \sup \{ d(T) : T : C \rightarrow C, T \text{ jest } k\text{-lipschitzowskie} \}$$

nazywamy *charakterystyką minimalnego przesunięcia* zbioru C . W szczególnym przypadku, gdy $C = B_X$, piszemy ψ_X zamiast φ_X .

Wiadomo (patrz [31]), że dla każdego zbioru C i każdego $k \geq 1$, $\varphi_C(k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) r(C)$, gdzie $r(C)$ oznacza promień Czebyszewa C , tzn. $r(C) = \inf_{z \in C} \sup \{ \|z - y\| : y \in C \}$. Zbiór C nazywany jest *ekstremalnym*, jeśli $\varphi_C(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) r(C)$ dla wszystkich $k \geq 1$. Ponadto, mówimy, że X jest *przestrzenią ekstremalną*, jeśli jej kula jednostkowa B_X jest ekstremalna.

Oczywiście, charakterystyka minimalnego przesunięcia może być również rozpatrywana dla pewnych podklas przekształceń lipschitzowskich. Do najbardziej interesujących należą tutaj:

$$\psi_{B_X \rightarrow S_X}(k) = \sup \{ d(T) : T : B_X \rightarrow S_X, T \text{ jest } k\text{-lipschitzowskie} \}$$

i

$$\psi_{S_X \rightarrow \{0\}}(k) = \sup \{ d(T) : T : B_X \rightarrow B_X, T \text{ jest } k\text{-lipschitzowskie i } T(S_X) = \{0\} \}.$$

Zagadnienie minimalnego przesunięcia polega na wyznaczeniu lub oszacowaniu przytoczonych wyżej funkcji, dla konkretnych zbiorów lub przestrzeni. Dokładne wartości dla tych funkcji znane są jedynie w przypadku przestrzeni i zbiorów ekstremalnych. Należą do nich: $C[0, 1]$, $C_0[0, 1]$, c_0 , dodatnia część sfery jednostkowej S^+ w ℓ_1 (patrz [27]). W mojej pracy magisterskiej [69] (patrz również [P2011]), wykazałem, że również przestrzeń c jest ekstremalna.

W pracy [GP2014] wykazano, że dla przestrzeni $X = C_0[0, 1]$ mamy

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \min \left\{ \frac{k+1}{4}, 1 \right\} \leq \psi_{S_X \rightarrow \{0\}}(k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \min \left\{ \frac{k}{2}, 1 \right\}.$$

W szczególności, $\psi_{S_X \rightarrow \{0\}}(k) = 1 - \frac{1}{k}$ dla wszystkich $k \geq 3$.

Przestrzeń ℓ_1 nie jest ekstremalna i mamy $\psi_X(k) < \varphi_{\frac{1}{2}S^+}(k) = 1 - \frac{1}{k}$ dla wszystkich $k > 1$ (patrz [27]).

Przestrzeń Hilberta H również nie jest ekstremalna ale w tym przypadku dla dowolnego zbioru $C \subset H$ z $r(C) = 1$ mamy $\varphi_C(k) = \psi_H(k)$ dla wszystkich $k \geq 1$ (patrz [27]). W

szczegółności, Goebel [28] wykazał, że

$$\psi_H(k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sqrt{\frac{k}{k+1}},$$

a Casini [20] podał oszacowanie od dołu

$$\psi_H(k) \geq 1 - \frac{2\sqrt{\sqrt{2}(k+1)}}{k}.$$

Ponadto, w 1973 roku Goebel [28] wykazał, że

$$\psi_{B_H \rightarrow S_H}(k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{3/2}. \quad (8.1)$$

Ostatnio wynik ten został poprawiony w pracy [CP2017]:

$$\psi_{B_H \rightarrow S_H}(k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{2k+1}{2}\right) \sqrt{\frac{k-1}{k^3+k-\sqrt{k(3k+1)}}}.$$

Przypomnijmy, że przestrzeń c_0 jest ekstremalna. Wobec tego łatwo zauważyć, że jeśli X zawiera prawie izometryczne kopie c_0 , to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony, domknięty i wypukły zbiór $C \subset X$ taki, że $\varphi_C(k) \geq 1 - \frac{1}{k} - \varepsilon$ dla każdego $k > 1$. Znacznie subtelniejszy wynik można znaleźć w pracy [P2014], gdzie wykazano, że jeśli przestrzeń Banacha X zawiera *asymptotycznie izometryczną* kopię c_0 , to X zawiera ograniczony, domknięty i wypukły zbiór C z $r(C) = 1$ taki, że dla każdego $k \geq 1$ istnieje k -kontrakcyjne przekształcenie $T : C \rightarrow C$ (tzn. $\|Tx - Ty\| < k\|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in C$, $x \neq y$) spełniające warunek $\|Tx - x\| > 1 - \frac{1}{k}$ dla wszystkich $x \in C$.

8.2. Przekształcenia średnio-lipschitzowskie. W 2007 roku Kazimierz Goebel i Maria Japón Pineda [29] wprowadzili klasę przekształceń *średnio-nieoddalających* i wykazali dla niej pewne twierdzenia o punkcie stałym. Następnie, w 2010 roku, definicja ta została rozszerzona w pracy [35]: niech (M, ρ) będzie przestrzenią metryczną oraz $T : M \rightarrow M$, przypuśćmy, że $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_n > 0$ i $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$; mówimy, że T jest przekształceniem α -lipschitzowskim ze stałą k , jeśli dla dowolnych $x, y \in M$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \rho(T^j x, T^j y) \leq k \rho(x, y).$$

Jeśli *wielowskiąznik* α i stała k nie są podane w sposób jawny, to mówimy, że przekształcenie T jest średnio-lipschitzowskie. Jeśli $k = 1$, to mówimy, że T jest średnio-nieoddalające.

Powyższy warunek był w kręgu moich zainteresowań matematycznych, a ponieważ w tamtym okresie Victor Pérez-García odbywał na Uniwersytecie Marii Curie-Skłodowskiej dwuletni staż doktorski, zaproponowałem mu wspólny projekt. Przypomnę teraz krótko kilka głównych wyników naszej owocnej współpracy.

Uśredniony warunek Lipschitza angażuje jedynie skończoną liczbę iteracji. Pomimo tego, okazało się, że warunek ten ma poważny wpływ nie tylko na zachowanie się stałych Lipschitza kolejnych iteracji T^n przekształcenia T ale również na ich asymptotykę (patrz [PP2011], [PP2012], [PP2013] i [PP2016]).

W pracy [PP2011] podaliśmy dokładne oszacowanie stałych Lipschitza dla wszystkich iteracji przekształceń średnio-lipschitzowskich:

Twierdzenie 8.1 ([PP2011], Theorem 2.1). *Niech (M, ρ) będzie przestrzenią metryczną, przypuśćmy, że $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ z $\alpha_1 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ i $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, $n \geq 1$, i niech przekształcenie $T : M \rightarrow M$ będzie α -lipschitzowskie ze stałą k . Wówczas $k(T^m) \leq b_m$, gdzie ciąg $\{b_m\}_{m=0}^\infty$ dany jest wzorem:*

$$b_m = \begin{cases} 1 & \text{dla } m = 0, \\ \frac{k}{\sum_{j=1}^m \alpha_j b_{m-j}^{-1}} & \text{dla } m = 1, \dots, n, \\ \frac{k}{\sum_{i=1}^n \alpha_i b_{m-i}^{-1}} & \text{dla } m = n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

W tym samym artykule wykazaliśmy, że to oszacowanie jest dokładne. ([PP2011], Example 2.2). Wykorzystaliśmy do tego przekształcenie $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ zdefiniowane dla każdego $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$ wzorem

$$Tx = \left(\frac{b_1}{b_0} x_2, \frac{b_2}{b_1} x_3, \dots, \frac{b_j}{b_{j-1}} x_{j+1}, \dots \right). \quad (\heartsuit)$$

Ponadto, podobne wyniki uzyskaliśmy dla przekształceń (α, p) -lipschitzowskich ze stałą k , tzn. spełniających warunek $\sum_{j=1}^n \alpha_j \rho(T^j x, T^j y)^p \leq k^p \rho(x, y)^p$ z $p \geq 1$ (patrz Theorem 2.3 w [PP2011]).

W pracy [PP2012] badaliśmy asymptotyczne zachowanie się ciągu stałych Lipschitza dla iteracji przekształceń średnio-nieoddalających ($k = 1$). Zdefiniowaliśmy $d_m = 1/b_m$ w celu uzyskania następującej relacji:

$$d_m = \begin{cases} 1 & \text{dla } m = 0, \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j d_{m-j} & \text{dla } m = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i d_{m-i} & \text{dla } m = n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

Następnie dowiedliśmy wyniku dotyczącego lokalizacji pierwiastków wielomianów (Lemma 2.4. w [PP2012]). Wykorzystaliśmy go do pokazania, że wartości własne pewnej specjalnej macierzy leżą ściśle wewnątrz zespolonego dysku jednostkowego. Ponadto, wykorzystując pewną specjalną własność przekształcenia T (patrz Lemma 2.1 w [PP2012]), otrzymaliśmy (patrz Theorem 2.5 w [PP2012])

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \alpha_i \right)},$$

a więc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \alpha_i \right).$$

W konsekwencji, mamy następujące

Twierdzenie 8.2 ([PP2012], Theorem 2.6). *Jeśli $T : M \rightarrow M$ jest (α, p) -nieoddalające, to*

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} k(T^m) \leq \left(\lim_{m \rightarrow \infty} b_m \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \alpha_i \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Powyższy wynik zastosowaliśmy do uzyskania pewnych nowych twierdzeń o punkcie stałym dla przekształceń średnio-nieoddalających (patrz Theorem 3.4 i Corollaries 3.5-3.7 w [PP2012]). W szczególności, na uwagę zasługuje tutaj następujący

Wniosek 8.3 ([PP2012], Corollary 3.7). *Niech C będzie niepustym, wypukłym, domkniętym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni Hilberta H i $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Wówczas C ma własność punktu stałego dla wszystkich przekształceń $(\alpha, 2)$ -nieoddalających.*

Niech $T : M \rightarrow M$ będzie przekształceniem lipschitzowskim. Wzór

$$k_\infty(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} (k(T^m))^{1/m}$$

definiuje tzw. *promień spektralny* T , który w ogólnym przypadku przekształceń nieliniowych ma następującą interpretację:

$$k_\infty(T) = \inf \{k_d(T) : d \text{ jest równoważna metryce } \rho\},$$

gdzie $k_d(T)$ oznacza stałą Lipschitza dla T względem metryki d .

W pracy [PP2013], dla zadanego wielowskaźnika $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $k > 0$, podaliśmy dokładne oszacowanie stałej $k_\infty(T)$, gdzie T jest dowolnym przekształceniem α -lipschitzowskim ze stałą k .

Twierdzenie 8.4 ([PP2013], Theorem 2.1). *Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie jak wyżej, $k > 0$ i $\{b_m\}_{m=0}^\infty$ jak w Twierdzeniu 8.1. Niech g będzie (jedynym) dodatnim rozwiązaniem równania*

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = k.$$

Wówczas $\lim_{m \rightarrow \infty} (b_m)^{1/m} = g$.

Warto tutaj wspomnieć, że głównym chwytem w dowodzie powyższego twierdzenia było zdefiniowanie nowej normy w ℓ_1 , zadanej dla każdego $x \in \ell_1$ wzorem:

$$\begin{aligned} \|x\|_T &= (\alpha_1 + \alpha_2 g + \dots + \alpha_n g^{n-1}) \|x\| \\ &\quad + (\alpha_2 + \alpha_3 g + \dots + \alpha_n g^{n-2}) \|Tx\| \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4 g + \dots + \alpha_n g^{n-3}) \|T^2 x\| + \dots \\ &\quad + \alpha_n \|T^{n-1} x\|, \end{aligned}$$

gdzie T jest przekształceniem ($\heartsuit$).

Z Twierdzenia 8.4 i Twierdzenia 8.2 otrzymujemy następujący

Wniosek 8.5. *Niech (M, ρ) będzie przestrzenią metryczną i niech $T : M \rightarrow M$ będzie przekształceniem α -lipschitzowskim z $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $k > 0$. Wówczas*

$$k_\infty(T) \leq g,$$

gdzie g jest jedynym dodatnim rozwiązaniem równania

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = k.$$

Wykorzystując techniki rozwinięte w pracy [PP2012], możemy w łatwy sposób rozwiązać następujący problem dotyczący *średnich ruchomych*: znajdź granicę ciągu $\{d_m\}_{m=0}^\infty$, gdzie $d_0, \dots, d_{n-1}$ są dowolnie wybranymi liczbami i

$$d_m = \alpha_1 d_{m-1} + \dots + \alpha_n d_{m-n} \quad \text{dla } m \geq n.$$

W pracy [PP2016] rozwiązaliśmy ogólniejszy problem dotyczący tzw. *uogólnionych średnich ruchomych* (lub *ciągów typu Fibonacciego*) w ogólnym przypadku przestrzeni Banacha:

Twierdzenie 8.6 ([PP2016], Theorem 3.3). *Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie jak wyżej, $k > 0$ i niech g będzie dodatnim rozwiązaniem równania*

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = k.$$

Niech $x_0, \dots, x_{n-1}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni Banacha X i niech x_m będzie zdefiniowany dla $m \geq n$ wzorem

$$x_m = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{k} x_{m-i}.$$

Wówczas

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^m x_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \alpha_j g^j} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \alpha_j g^j \right) g^{n-i} x_{n-i}.$$

W szczególności, jeśli $k = 1$, to otrzymujemy klasyczne średnie ruchome i odpowiedź na przytoczony wcześniej problem:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \alpha_j} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \alpha_j \right) x_{n-i}.$$

W artykule [PPS2017], wykorzystując techniki rozwinięte w pracach [PP2012], [PP2013] i [PP2016], podaliśmy nowy algorytm, który jest użyteczny w wyznaczaniu dodatniego pierwiastka dla pewnej klasy wielomianów.

Wiele spośród wyników zaprezentowanych powyżej stanowiło ważną część mojej rozprawy doktorskiej [70], napisanej pod kierunkiem profesora Kazimierza Goebela. Jej rozszerzona wersja została opublikowana w 2013 roku w formie książki “Classification of Lipschitz Mappings” CRC Press (patrz [P2013]).

LITERATURA

- [1] D. E. Alspach, *Quotients of c_0 are almost isometric to subspaces of c_0* , Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1979) 285-288.
- [2] D. E. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 423-424.
- [3] D. E. Alspach, *A ℓ_1 -predual which is not isometric to a quotient of $C(\alpha)$* , in: *Banach spaces (Mérida, 1992)*, volume 144 of *Contemp. Math.*, pages 9-14. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [4] M. Annoni, E. Casini, *An upper bound for the Lipschitz retraction constant in l_1* , Studia Math. 180 (1) (2007), 73-76.
- [5] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodic pour les contractions nonlinéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris 280 (1975), 1511-1514.
- [6] M. Baronti, *Norm-one projections onto subspaces of ℓ^∞* , Arch. Math. 51 (1988), 242-246.
- [7] M. Baronti, E. Casini, C. Franchetti, *The retraction constant in some Banach spaces*, J. Approx. Theory, 120 (2003), 296-308.
- [8] Y. Benyamini and Y. Sternfeld, *Spheres in infinite dimensional Banach space are Lipschitz contractible*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 439-445.
- [9] T. Domínguez Benavides, *Stability of the fixed point property for nonexpansive mappings*, Houston J. Math. 22 (4) (1996), 835-849.
- [10] T. Domínguez Benavides, J. García Falset, M. A. Japón-Pineda, *The τ -fixed point property for nonexpansive mappings*, Abstr. Appl. Anal. 3 (1998), 343-362.
- [11] J. Blatter, E. W. Cheney, *Minimal Projections on Hyperplanes in Sequence Spaces*, Annali Mat. Pura Appl. 101 (1974), 215-227.
- [12] K. Bolibok, *Minimal displacement and retraction problems for balls in Banach spaces*, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, (Ph.D. Thesis), 1999 (in Polish).
- [13] J. M. Borwein and B. Sims, *Nonexpansive mappings on Banach lattices and related topics*, Houston J. Math. 10 (1984), 339-356.
- [14] M. S. Brodskii, D. P. Milman, *On the center of a convex set*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 59 (1948), 837-840 (Russian).

- [15] B. Brosowski, F. Deutsch, *On some geometric properties of suns*, J. Approx. Theory 10 (1974), 245-267.
- [16] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71 (1912), 97-115.
- [17] F. E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1965a), 1272-1276.
- [18] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 54 (1965b), 1041-1044.
- [19] M. Cambern, *On mappings of sequence spaces*, Studia Math. 30 (1968), 73-77.
- [20] E. Casini, *Minimal displacement in Hilbert spaces*, Studia Math. 165 (3) (2004), 215-219.
- [21] R. Durier, P. L. Papini, *Polyhedral norms in an infinite dimensional space*, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 863-875.
- [22] J. Elton, P. K. Lin, E. Odell, and S. Szarek, *Remarks on the fixed point problem for nonexpansive maps*, Contemporary Math. 18 (1983), 87-120.
- [23] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics, 2001.
- [24] V. P. Fonf, L. Veselý, *Infinite-dimensional polyhedrality*, Canad. J. Math. 56 (2004), 472-494.
- [25] I. Gasparis, *On contractively complemented subspaces of separable L_1 -preduals*, Israel J. Math. 128 (2002), 77-92.
- [26] A. Gleit, R. McGuigan, *A note on polyhedral Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), 398-404.
- [27] K. Goebel, *Concise Course on Fixed Point Theorems*, Yokohama Publishers, 2002.
- [28] K. Goebel, *On minimal displacement of points under lipschitzian mappings*, Pacific J. Math. 48 (1973), 151-163.
- [29] K. Goebel, M. A. Japón Pineda, *On a type of generalized nonexpansiveness*, Proceedings of the 8th International Conference of Fixed Point Theory and its Applications, pages 71-82, 2007.
- [30] K. Goebel and W. A. Kirk, *A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant*, Studia Math. 47 (1973), 135-140.
- [31] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [32] K. Goebel, T. Kuczumow, *Irregular convex sets with the fixed point property for nonexpansive mappings*, Colloq. Math. 40 (1978), 259-264.
- [33] K. Goebel and G. Marino, *A note on minimal displacement and optimal retraction problems*, Proceedings of the Seventh International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Guanajuato, Mexico, July 17-23, 2005, Yokohama Publishers, 2006.
- [34] K. Goebel, G. Marino, L. Muglia and R. Volpe, *The retraction constant and minimal displacement characteristic of some Banach spaces*, Nonlinear Anal. 67 (2007), 735-744.
- [35] K. Goebel, B. Sims, *Mean Lipschitzian Mappings*, Contemporary Mathematics 513 (2010) 157-167.
- [36] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30 (1965), 251-258.
- [37] Y. Gordon, *On the distance coefficient between isomorphic function spaces*, Israel J. Math. 8 (1970), 391-397.
- [38] A. J. Guirao, V. Montesinos, V. Zizler, *On Preserved and Unpreserved Extreme Points*, in: *Descriptive Topology and Functional Analysis* (Eds.: J. C. Ferrando, M. López-Pellicer), Springer, 2014, 163-193.
- [39] M. A. Japón-Pineda and S. Prus, *Fixed point property for general topologies in some Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 70 (2004), 229-244.
- [40] A. Jiménez-Melado, *Stability of weak normal structure in James quasi-reflexive space*, Bull. Austral. Math. Soc. 46 (1992), 367-372.
- [41] W. B. Johnson and M. Zippin, *Every separable predual of an L_1 space is a quotient of $C(\Delta)$* , Israel J. Math. 16 (1973), 198-202.
- [42] L. A. Karlovitz, *On nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 321-325.
- [43] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.
- [44] W. A. Kirk, B. Sims (Eds.), *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Academic Publishers (2001).
- [45] V. Klee, *Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 10-43.
- [46] V. Klee, *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 30-45.
- [47] V. Klee, *Polyhedral sections of convex bodies*, Acta Math. 103 (1960), 243-267.

- [48] T. Komorowski and J. Wośko, *A remark on the retracting of a ball onto a sphere in an infinite dimensional Hilbert space*, Math. Scand. 67 (1990), 223-226.
- [49] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 208.
- [50] A. J. Lazar, *Polyhedral Banach spaces and extensions of compact operators*, Israel J. Math. 7 (1969), 357-364.
- [51] A. J. Lazar, J. Lindenstrauss, *On Banach spaces whose duals are L_1 spaces*, Israel J. Math. 4 (1966), 205-207.
- [52] A. J. Lazar, J. Lindenstrauss, *Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices*, Acta Math. 126 (1971), 165-193.
- [53] E. A. Lifschitz, *Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces*, Voronez Gos. Univ. Trudy Mat. Fak. 16 (1975) 23-28 (in Russian).
- [54] T. C. Lim, *Asymptotic centers and nonexpansive mappings in conjugate Banach spaces*, Pacific J. Math. 90 (1980), 135-143.
- [55] P. K. Lin, *Stability of the fixed point property of Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 3573-3581.
- [56] P. K. Lin and Y. Sternfeld, *Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985) 633-639.
- [57] J. Lindenstrauss, *Notes on Klee's paper "Polyhedral sections of convex bodies"*, Israel J. Math. 4 (1966), 235-242.
- [58] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964).
- [59] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I. Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [60] P. H. Maserick, *Convex polytopes in linear spaces*, Illinois J. Math. 9 (1965), 623-635.
- [61] B. Maurey, *Points fixes des contractions sur un convex formé de L^1* , Seminaire d'Analyse Fonctionnelle 1980-1981, Expose no VIII, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [62] E. Mazcuñán-Navarro, *Stability of the fixed point property in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (1) (2006), 129-138.
- [63] S. Mazurkiewicz and W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, Fund. Math. 1 (1920), 17-27.
- [64] E. Michael, A. Pełczyński, *Separable Banach spaces which admit ℓ_n^∞ approximations*, Israel J. Math. 4 (1966), 189-198.
- [65] B. Nowak, *On the Lipschitz retraction of the unit ball in infinite dimensional Banach spaces onto boundary*, Bull. Acad. Polon. Sci. 27 (1979) 861-864.
- [66] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591-597.
- [67] M. I. Ostrovskiĭ, *Topologies on the set of all subspaces of a Banach space and related questions of Banach space geometry*, Quaest. Math. 17 (1994) 259-319.
- [68] A. Pełczyński in collaboration with Cz. Bessaga, *Some aspects of the present theory of Banach spaces. Oeuvres Stefan Banach. Vol. II*. PWN Warszawa 1979, 221-302.
- [69] Ł. Piasecki, *O retrakcjach kul na sfery*, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie (M.Sc. Thesis), 2007 (in Polish).
- [70] Ł. Piasecki, *Przekształcenia średnio-lipschitzowskie*, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie (Ph.D. Thesis), 2012 (in Polish).
- [71] S. Prus, *Banach spaces with the uniform Opial property*, Nonlinear Anal. 18 (1992), 697-704.
- [72] S. Prus, *Geometrical backgrounds of metric fixed point theory*, in: *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, pp. 269-297.
- [73] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen*, Studia Math. 2 (1930), 171-180.
- [74] B. Sims, *Examples of fixed point free mappings*, in: *Handbook of Metric Fixed Point Theory*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 35-48.
- [75] M. Smyth, *Remarks on the weak star fixed point property in the dual of $C(\Omega)$* , J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 294-306.
- [76] P. M. Sordi, *Schauder basis and fixed points of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 101 (1982), 193-198.
- [77] L. Veselý, *Boundary of polyhedral spaces: an alternative proof*, Extracta Math. 15 (2000), 213-217.
- [78] M. Zippin, *On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 378-385.

Ł. Piasecki