

Streszczenie rozprawy doktorskiej
Własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza

Niech $\mathbb{D}$ oznacza otwarte koło jednostkowe, a $\mathbb{T}$ - okrąg jednostkowy. Przez $L^2 := L^2(\mathbb{T}, \frac{d\theta}{2\pi})$ oznaczać będziemy przestrzeń funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ takich, że

$$\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Symbol H^2 będzie oznaczał przestrzeń Hardy'ego, czyli przestrzeń złożoną z tych funkcji klasy L^2 , dla których współczynniki Fouriera o ujemnych indeksach zerują się. Przestrzeń H^2 można również traktować jako przestrzeń wszystkich funkcji f analitycznych w $\mathbb{D}$, dla których $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)|^2 < \infty$, gdzie $a_n(f)$ oznacza n -ty współczynnik rozwinięcia f w szereg Taylora o środku w zerze, a więc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)z^n$, $z \in \mathbb{D}$. Rzut ortogonalny z przestrzeni L^2 na przestrzeń H^2 oznaczać będziemy przez P .

Jednymi z najbardziej znanych operatorów na przestrzeni H^2 są klasyczne operatory Toeplitza. Niech L^∞ oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych, istotnie ograniczonych na $\mathbb{T}$. Dla $\varphi \in L^\infty$ operator Toeplitza $T_\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ określamy wzorem

$$T_\varphi f = P(\varphi f).$$

Funkcję φ nazywamy symbolem operatora T_φ . Zwróćmy uwagę, że dla $\varphi \in L^2$ operator Toeplitza zdefiniowany powyżej jest dobrze określony na gęstej podprzestrzeni $H^\infty \subset H^2$, składającej się z funkcji analitycznych i ograniczonych na $\mathbb{D}$ (jeśli $\varphi \in L^2$ i $f \in H^\infty$, to $\varphi f \in L^2$). Wiadomo, że operator T_φ daje się rozszerzyć do operatora ograniczonego na całej przestrzeni H^2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in L^\infty$.

W rozdziale pierwszym rozprawy przytaczamy podstawowe własności klasycznych operatorów Toeplitza, jak i własności przestrzeni Hardy'ego. Ważnym przykładem operatora Toeplitza jest operator przesunięcia $S = T_z$, tzn. $(Sf)(z) = zf(z)$, którego sprzężenie dane jest wzorem

$$(S^*f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

W [2] pokazano, że operatory Toeplitza można scharakteryzować za pomocą operatora przesunięcia S jako te ograniczone operatory liniowe $T : H^2 \rightarrow H^2$, które spełniają warunek $S^*TS = T$.

Niech α będzie dowolną funkcją wewnętrzną, czyli $\alpha \in H^\infty$ i $|\alpha| = 1$ prawie wszędzie względem miary Lebesgue'a na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$. Przestrzenią modelową wyznaczoną przez funkcję wewnętrzną α nazywamy podprzestrzeń K_α przestrzeni H^2 będącą dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni αH^2 w H^2 , tzn.

$$K_\alpha = H^2 \ominus \alpha H^2.$$

Z twierdzenia Beurlinga ([10, Tw. 17.21]) wynika, że przestrzenie modelowe są jedynymi domkniętymi (właściwymi) podprzestrzeniami przestrzeni H^2 , przekształcanymi przez S^* w siebie.

Z przestrzenią modelową K_α związane są tzw. obcięte operatory Toeplitza A_φ^α , które można traktować jako zawężenie do przestrzeni modelowej klasycznych operatorów Toeplitza na przestrzeni H^2 . Niech $P_\alpha : L^2 \rightarrow K_\alpha$ oznacza rzut ortogonalny z przestrzeni L^2 na przestrzeń K_α . Dla $\varphi \in L^2$ operator A_φ^α definiujemy wzorem

$$A_\varphi^\alpha f = P_\alpha(\varphi f), \quad f \in K_\alpha^\infty = K_\alpha \cap H^\infty.$$

Funkcję φ nazywamy symbolem operatora A_φ^α . Ze względu na gęstość K_α^∞ w K_α , tak zdefiniowany operator A_φ^α jest operatorem gęsto określonym. Okazuje się, że ograniczoność symbolu nie jest konieczna, by operator A_φ^α dał się rozszerzyć do ograniczonego operatora na całej przestrzeni K_α ([1]).

W rozdziale drugim opisujemy podstawowe własności przestrzeni modelowej i pewnych jej przekształceń, w tym szczególne własności obciętych operatorów Toeplitza. Chociaż klasyczne oraz obcięte operatory Toeplitza zdefiniowane są w podobny sposób, to mają one różne własności. Przykładowo, operator T_φ jest jednoznacznie wyznaczony przez symbol φ , co oznacza, że $T_\varphi = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi = 0$. Nie jest to prawda w przypadku operatora A_φ^α . D. Sarason [11, Tw. 3.1] wykazał, że $A_\varphi^\alpha = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \overline{\alpha H^2} + \alpha H^2$. Wynika stąd na przykład, że obcięty operator Toeplitza A_φ^α o nieograniczonym symbolu może być operatorem zerowym (a więc ograniczonym). W pracy [1] pokazano, że istnieją ograniczone obcięte operatory Toeplitza, dla których nie istnieje ograniczony symbol. D. Sarason pokazał, że obcięte operatory Toeplitza można w podobny sposób scharakteryzować za pomocą obciętego operatora przesunięcia $S_\alpha = A_z^\alpha$. Wykazał on [11, Uwaga po twierdzeniu 4.1], że ograniczony operator liniowy $A : K_\alpha \rightarrow K_\alpha$ jest obciętym operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\chi, \psi \in K_\alpha$ takie, że

$$A - S_\alpha^* A S_\alpha = \psi \otimes \tilde{k}_0^\alpha + \tilde{k}_0^\alpha \otimes \chi,$$

gdzie $\tilde{k}_0^\alpha(z) = \frac{\alpha(z) - \alpha(0)}{z}$ (symbol $\otimes$ oznacza operator rzędu 1 na przestrzeni Hilberta, $f \otimes g(h) = \langle h, g \rangle f$, dla f, g i h należących do tej przestrzeni), a S_α^* jest obciętym operatorem Toeplitza z symbolem $\bar{z}$.

W 2008 J. A. Cima, W. T. Ross i W. R. Wogen [6] scharakteryzowali macierze obciętych operatorów Toeplitza na skończone wymiarowych przestrzeniach K_α . Wiadomo, że wymiar przestrzeni K_α jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy α jest skończonym iloczynem Blaschkego. Jeśli α jest iloczynem Blaschkego mającym m zer, to wymiar przestrzeni K_α jest równy m . W [11] D. Sarason udowodnił, że jeśli α jest iloczynem Blaschkego mającym m zer, to wymiar przestrzeni wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na K_α wynosi $2m - 1$.

Jeśli α jest iloczynem Blaschkego mającym m różnych zer $\{a_1, \dots, a_m\}$ oraz

$$k_w^\alpha(z) = \frac{1 - \overline{\alpha(w)}\alpha(z)}{1 - \bar{w}z}, \quad \tilde{k}_w^\alpha(z) = \frac{\alpha(z) - \alpha(w)}{z - w}, \quad w \in \mathbb{D},$$

to układy $\mathcal{R}_m^\alpha = \{k_{a_1}^\alpha, \dots, k_{a_m}^\alpha\}$ oraz $\tilde{\mathcal{R}}_m^\alpha = \{\tilde{k}_{a_1}^\alpha, \dots, \tilde{k}_{a_m}^\alpha\}$ stanowią bazy przestrzeni K_α . Autorzy w [6] wykazali, że macierz obciętego operatora Toeplitza w bazie $\mathcal{R}_m^\alpha$ jest wyznaczona przez $2m - 1$ swoich elementów: elementy na głównej przekątnej i elementy w pierwszym wierszu. Podali oni również podobne charakteryzacje dla

bazy $\widetilde{\mathcal{R}}_m^\alpha$ i tzw. bazy Clarka. Macierze operatorów z przestrzeni wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na K_α w przypadku, gdy α jest nieskończonym iloczynem Blaschkego (przy dodatkowym założeniu o jego zerach) opisano w [9]. Twierdzenia te prezentujemy w rozdziale drugim.

Asymetryczne obcięte operatory Toeplitza są uogólnieniami obciętych operatorów Toeplitza (po raz pierwszy zostały wprowadzone w pracach [3, 4, 5]). Niech α, β będą dwiema funkcjami wewnętrznymi oraz niech $\varphi \in L^2$. Asymetryczny obcięty operator Toeplitza $A_\varphi^{\alpha, \beta}$ definiujemy jako

$$A_\varphi^{\alpha, \beta} f = P_\beta(\varphi f), \quad f \in K_\alpha^\infty,$$

gdzie P_β oznacza rzut ortogonalny z przestrzeni L^2 na przestrzeń K_β . Operator $A_\varphi^{\alpha, \beta}$ jest więc określony na gęstym podzbiórze przestrzeni K_α i działa w przestrzeń K_β . Niech

$$\mathcal{T}(\alpha, \beta) = \{A_\varphi^{\alpha, \beta} : \varphi \in L^2 \text{ oraz } A_\varphi^{\alpha, \beta} \text{ jest ograniczony}\}.$$

Oczywiście $A_\varphi^{\alpha, \alpha} = A_\varphi^\alpha$ oraz $\mathcal{T}(\alpha, \alpha) = \mathcal{T}(\alpha)$.

Główne wyniki rozprawy dotyczą własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza. Wyniki te zawarte są w rozdziale trzecim i czwartym rozprawy.

W rozdziale trzecim podajemy podstawowe własności operatorów z przestrzeni $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$. Między innymi opisujemy wszystkie asymetryczne obcięte operatory Toeplitza równe operatorowi zerowemu. W [3] pokazano, że $A_\varphi^{\alpha, \beta} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \overline{\alpha H^2} + \beta H^2$, w przypadku, gdy funkcja β dzieli funkcję α , to znaczy kiedy iloraz α/β jest funkcją wewnętrzną. W niniejszej pracy dowodzimy, że równoważność ta jest prawdziwa dla dowolnych funkcji wewnętrznych α oraz β . W rozdziale trzecim podajemy również przykłady asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza rzędu 1. Uogólniamy też na przestrzeń $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$ wynik D. Sarasona dotyczący wymiaru przestrzeni $\mathcal{T}(\alpha)$.

W rozdziale czwartym badamy charakterystacje ograniczonych asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza z za pomocą ich macierzy w odpowiednich bazach. Wykazujemy na przykład, że

Twierdzenie. *Niech α będzie skończonym iloczynem Blaschkego z różnymi zerami $\{a_1, \dots, a_m\}$ i niech β będzie skończonym iloczynem Blaschkego z różnymi zerami $\{b_1, \dots, b_n\}$. Załóżmy ponadto, że α oraz β mają dokładnie l wspólnych zer: $a_i = b_i$ dla $i \leq l$ ($l = 0$ jeżeli α i β nie mają wspólnych zer). Niech A będzie operatorem liniowym z przestrzeni K_α w przestrzeń K_β i niech $M_A = [r_{s,p}]$ będzie macierzą operatora A w bazach $\mathcal{R}_m^\alpha$ i $\mathcal{R}_n^\beta$.*

(a) *Jeżeli $l = 0$, to $A \in \mathcal{T}(\alpha, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$r_{s,p} = \frac{\overline{\beta'(b_s)}(\bar{a}_1 - \bar{b}_s)r_{s,1} + \overline{\beta'(b_1)}(\bar{b}_1 - \bar{a}_1)r_{1,1} + \overline{\beta'(b_1)}(\bar{a}_p - \bar{b}_1)r_{1,p}}{\overline{\beta'(b_s)}(\bar{a}_p - \bar{b}_s)}$$

dla wszystkich $1 \leq p \leq m$ oraz $1 \leq s \leq n$.

(b) *Jeżeli $l > 0$, to $A \in \mathcal{T}(\alpha, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$r_{s,p} = \frac{\overline{\beta'(b_1)}(\bar{a}_1 - \bar{b}_s)r_{1,s} + \overline{\beta'(b_1)}(\bar{a}_p - \bar{b}_1)r_{1,p}}{\overline{\beta'(b_s)}(\bar{a}_p - \bar{b}_s)}$$

dla wszystkich p, s takich, że $1 \leq p \leq m, 1 \leq s \leq l, s \neq p$, oraz

$$r_{s,p} = \frac{\overline{\beta'(b_s)}(\bar{a}_1 - \bar{b}_s)r_{s,1} + \overline{\beta'(b_1)}(\bar{a}_p - \bar{b}_1)r_{1,p}}{\overline{\beta'(b_s)}(\bar{a}_p - \bar{b}_s)}$$

dla wszystkich p, s takich, że $1 \leq p \leq m, l < s \leq n$.

Dowodzimy także twierdzenia dla baz: $\widetilde{\mathcal{R}}_m^\alpha$ i $\widetilde{\mathcal{R}}_n^\beta$, baz Clarka $\mathcal{V}_m^\alpha$ i $\mathcal{V}_n^\beta$ oraz zmodyfikowanych baz Clarka $\mathcal{E}_m^\alpha$ i $\mathcal{E}_n^\beta$. Analizujemy również, nie badane wcześniej, charakteryzacje za pomocą macierzy w bazach mieszanych, a więc: w bazach $\mathcal{R}_m^\alpha$ oraz $\widetilde{\mathcal{R}}_n^\beta$, w bazach $\widetilde{\mathcal{R}}_m^\alpha$ oraz $\mathcal{R}_n^\beta$, w bazie Clarka $\mathcal{V}_m^\alpha$ oraz w bazie $\mathcal{R}_n^\beta$, w bazie Clarka $\mathcal{V}_m^\alpha$ oraz w bazie $\widetilde{\mathcal{R}}_n^\beta$, w bazie $\widetilde{\mathcal{R}}_m^\alpha$ oraz w bazie Clarka $\mathcal{V}_n^\beta$, a także w bazie $\mathcal{R}_m^\alpha$ oraz w bazie Clarka $\mathcal{V}_n^\beta$. Podane charakteryzacje dotyczą zarówno przypadku, gdy α oraz β są skończonymi iloczynami Blaschkego, jak i nieskończonymi iloczynami Blaschkego (przy dodatkowych założeniach o zerach iloczynu).

LITERATURA

- [1] A. Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. E. Mashregi and D. Timotin, *Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators*, J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 10, 2673–2701.
- [2] A. Brown, P. R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math. 213 (1963/1964), 89–102.
- [3] C. Cămară, K. Kliś-Garlicka, J. Jurasik, M. Ptak, *Characterizations of asymmetric truncated Toeplitz operators*, Banach J. Math. Anal. 11 (2017), no. 4, 899–922.
- [4] M. C. Cămară, J. R. Partington, *Asymmetric truncated Toeplitz operators and Toeplitz operators with matrix symbol*, J. Oper. Theory 77 (2017), no. 2, 455–479.
- [5] M. C. Cămară, J. R. Partington, *Spectral properties of truncated Toeplitz operators by equivalence after extension*, J. Math. Anal. Appl. 433 (2016), no. 2, 762–784.
- [6] J. A. Cima, W. T. Ross, W. R. Wogen, *Truncated Toeplitz operators on finite dimensional spaces*, Oper. Matrices 2 (2008), no. 3, 357–369.
- [7] J. Jurasik, B. Łanucha, *Asymmetric truncated Toeplitz operators equal to the zero operator*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 70 (2016), no. 2, 51–62.
- [8] J. Jurasik, B. Łanucha, *Asymmetric truncated Toeplitz operators on finite-dimensional spaces*, Oper. Matrices 11 (2017), no. 1, 245–262.
- [9] B. Łanucha, *Matrix representations of truncated Toeplitz operators*, J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 430–437.
- [10] W. Rudin, *Analiza Rzeczywista i Zespółona*, PWN, Warszawa 1998.
- [11] D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*, Operators and Matrices 1 (2007), no. 4, 491–526.

19.06.2018r.

Joanna Jurasik