

Recenzja pracy doktorskiej mgr Joanny Barańskiej
pt. *Markowskie dynamiki skokowe w przestrzeniach ciągłych*

Praca doktorska mgr Joanny Barańskiej poświęcona jest badaniu ewolucji układów oddziałujących cząstek. Stanami w takich układach są podzbiory $\mathbb{R}^n$, których zawężenia do obszarów ograniczonych są zbiorami skończonymi. Rodzinę takich zbiorów będziemy oznaczać przez Γ . Z powodów czysto technicznych wygodniej jest zastąpić podzbiory miarami — sumami delt Diraca po punktach zbioru. Stan układu może się zmienić, gdy pojawi się nowy punkt, zginie jeden z punktów zbioru, lub też któryś z punktów zmieni skokowo swoje położenie. Te elementarne zdarzenia mogą zależeć od całej konfiguracji, ale zakłada się, że ewolucja zależy tylko od stanu teraźniejszego. Dlatego takie procesy nazywane są w pracy *markowskimi dynamikami skokowymi*. Należy zaznaczyć, że jest to fragment większej całości zwanej albo modelami indywidualnymi (IBM) lub modelami agentowymi (ABM), o czym autorka rozprawy nawet nie wspomina. Obie wspomniane teorie są bardzo popularne wśród osób zajmujących się zastosowaniami matematyki lub informatyki w naukach przyrodniczych ponieważ stanowią bardzo wygodny punkt wyjścia do wprowadzania modeli matematycznych uwzględniających indywidualne oddziaływania między osobnikami (indywiduami, cząsteczkami), a następnie można je badać za pomocą symulacji komputerowych lub po odpowiednich przejściach granicznych prowadzą do znanych obiektów matematycznych, np. równań różniczkowych cząstkowych z operatorami oddziaływań. We wstępie do pracy, doktorantka poświęca zagadnieniu potencjalnych zastosowań dwa zdania i na tym koniec, a zaczyna się dość hermetyczna matematyka.

Praca składa się z dość obszernego wstępu, czterech rozdziałów i krótkiego dodatku. W pierwszym rozdziale doktorantka wprowadza oznaczenia i definiuje podstawowe pojęcia używane w pracy. Zasadnicze wyniki pracy pojawiają się w rozdziałach drugim i trzecim, w których badane są modele Kawasaki i Widoma-Rowlinsona. W czwartym rozdziale podane są dowody twierdzeń, a dodatek zawiera twierdzenie o generowaniu półgrupy stochastycznej, z którego korzysta się we wcześniejszych dowodach.

W pracy rozważane są procesy Markowa na Γ , więc rozkład tego procesu w ustalonej chwili czasu jest miarą probabilistyczną określoną na Γ . Interesuje nas ewolucja tej miary w czasie. Zamiast używać bezpośrednio równania Fokkera-Plancka opisującego ewolucję miary (lub jej gęstości względem pewnej standardowej miary), zwykle wygodniej jest rozpocząć od równania Kołmogorowa wstecz opisującego zmianę wartości oczekiwanej funkcji rzeczywistej określonej na Γ . Wiemy, że w przypadku zmiennych losowych istnieje ścisła zależność między ich rozkładami, a momentami tych zmiennych. Tu sytuacja wygląda podobnie. Zamiast rozważać ewolucję rozkładów bada się ewolucję funkcji korelacyjnych związanych z rozpatrywanymi procesami.

Spróbuję streścić główne zagadnienia badane w pracy. Model Kawasaki opisuje proces Markowa kawałkami stały na przestrzeni stanów Γ , w których z dowolnego punktu x ustalonej konfiguracji $\gamma \in \Gamma$ możemy przemieścić się do punktu y z intensywnością c zależną od x , y i samej konfiguracji γ . Przyjmuje się, że c jest iloczynem jądra skoku $a(x-y)$ i funkcji ϕ zależnej od konfiguracji zmniejszającej intensywność skoku w obszary już zajęte przez inne cząsteczki. Można rozpatrywać model wolnych skoków, w którym $\phi \equiv 0$ i wtedy zmiany położenia cząsteczek nie zależą od ich konfiguracji, więc jest to rodzaj procesu gałęzowego na ciągłej przestrzeni stanów. Model Widoma-Rowlinsona opisuje cząsteczki dwóch typów. Cząsteczki różnych typów odpychają się nawzajem, podczas gdy tego samego typu nie oddziałują. Doktorantka bada równania opisujące ewolucję miar, ich gęstości względem ustalonej miary i co najważniejsze ewolucję funkcji korelacyjnych. Końcówka rozdziału trzeciego poświęcona jest przejściu do modelu mezoskopowego. Model mezoskopowy powstaje przez odpowiednie przejście graniczne z modelu mikroskopowego. Model ten opisuje ewolucję gęstości na przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Główną trudnością jaką musiała pokonać doktorantka, było zaawansowanie pojęciowo badanej teorii i konieczność użycia technik z różnych dziedzin matematyki. Ponieważ część z rozpatrywanych równań to równania liniowe na przestrzeni L^1 lub miar z normą całkowitego wahan, więc w dowodzie globalnego istnienia i jednoznaczności rozwiązań wygodne okazało się użycie twierdzenia Thieme-Voigta o generowaniu półgrupy stochastycznej. Rozumowania przedstawione w dowodach wymagają dużej umiejętności w operowaniu różnymi abstrakcyjnymi przestrzeniami funkcji i miar oraz użycia nierówności w przestrzeniach funkcyjnych. Uważam, że badana tematyka jest nowoczesna, zaś rozprawa jest na dobrym poziomie. Praca jest dobrze napisana. Oparta jest na trzech pracach doktorantki z promotorem opublikowanych w *J. Dynam. Differential Equations*, *Contemporary Mathematics* i *IMA Journal of Applied Mathematics*, co jeszcze podnosi znacznie jej ocenę. Kilka drobnych uwag krytycznych, co do samej konstrukcji pracy i pewnych drobnych usterek podam na końcu recenzji.

Moje główne uwagi krytyczne nie dotyczą bezpośrednio pracy, ale ponieważ w przypadku pracy z tej tematyki zagadnienie potencjalnych zastosowań jest istotne, więc pozwolę sobie na komentarz w tej materii. Modele rozpatrywane w pracy mogą być z powodzeniem stosowane w mechanice statystycznej i w ograniczonym stopniu w dynamice populacyjnej. Na przykład mogą służyć do opisu zderzających się molekuł, w których parametrem opisującym molekułę jest jej prędkość. Zmiana prędkości następuje w momencie zderzenia cząsteczek i dlatego jest to proces skokowy. Zauważmy, że jeżeli jednak interesuje nas również położenie cząsteczek, to już te modele nie obowiązują, bo oprócz skoku prędkości mamy ciągłą zmianę położenia. Jest tu jeszcze jeden problem. W procesie zderzeń zmiana prędkości następuje w obu cząsteczkach, a w rozpatrywanych modelach skok jest pojedynczy. Inny przykład zastosowań, to modele fenotypowe dynamiki populacyjnej, w których osobnik ma przez całe życie ustalone cechy, a konfiguracja zmienia się tylko w momencie narodzin lub śmierci jednego z osobników. Tu dochodzi jeszcze inny problem. W rozpatrywanych modelach w dysertacji średnia liczba osobników jest stała co wynika z postaci operatora (1.44) i jest poważnym ograniczeniem. W rozprawie brakuje mi przykładu zastosowania teorii do jakiegoś konkretnego zagadnienia. W szczególności chciałbym zobaczyć czy z równań dotyczących korelacji, a najlepiej tych uzyskanych z „ewolucji przeskalowanej” (część 3.3), można się dowiedzieć jak wygląda rozkład graniczny w modelu fenotypowym. To byłby prawdziwy test na użyteczność tej teorii. Bibliografia załączona do pracy jest praktycznie ograniczona do grupy współpracowników promotora: Alberverio, Finkelstein, Kondratiev, Kuna, Kutuviy, Lytvynov, Röcker itd, a reszta to pozycje już dość wiekowe lub monografie. Warto byłoby trafić z tą dość ciekawą tematyką do innego kręgu czytelników i ją rozpropagować.

Szczegółowe uwagi.

0. Zamiast wprowadzania procesu skokowego na przestrzeni konfiguracji za pomocą pólgrup operatorów, tak jak to jest robione w rozprawie, można patrzeć na to jak na problem martyngałowy. Warto o tym wiedzieć.

1. W pracy znalazłem dość sporo ciekawostek językowych, świadczących o tym jak różnorodny może być język polski. Przykłady: str. 7 „istniała możliwość zafiksować położenie początkowe”; str. 9. „Żeby podolać tę przeszkodę”, „do tej co zawiera”, „W modelu rozpatrywanym w danej rozprawie odpychanie jest tego drugiego rodzaju” (niepotrzebne „danej” i „tego”); str. 10 „pomieszczonych”, „Dynamika narodzenia-śmierci”, słowo „Propozycja” zamiast „Stwierdzenie”.

2. Strona 12. Zakłada się, że elementami przestrzeni konfiguracyjnej Γ są zbiory. A co

się stanie jeżeli skok z konfiguracji γ nastąpi do punktu, który już jest w γ , np. urodzi się osobnik o już istniejącym parametrze w konfiguracji. Po to wprowadza się γ jako sumę delt Diraca aby objąć ten przypadek.

3. Strona 13. Co to jest $\sqcup$?

4. Strona 14 trzecia linia: „wszystkie $\gamma \in \Gamma_0$ należą do pewnego Γ_λ ” Raczej „każde $\gamma \in \Gamma_0$ należy do pewnego Γ_λ ”.

5. Str 16 po prawej stronie wzoru (1.10) zamiast jednego $d\eta$ powinno być $d\xi$.

6. Definicja 1.2 jest dość dziwnie napisana. Co to jest *całkowita funkcja typu wykładniczego*? Czytelnik musi się domyślić, że jest zdefiniowana wzorem (1.15), a następnie pojawia się funkcja korelacyjna, która też jest zdefiniowana na podobnej zasadzie.

7. Ta uwaga dotyczy całej pracy. **W pracy jest za dużo odwołań do innych prac bez szczegółowego wyjaśnienia.** Na przykład na stronie 18 mamy cztery takie odwołania.

8. Str. 20 trzecia linia: opisaną $\rightarrow$ opisanej.

9. Wzór (2.1) zostało zgubione x .

10. Szkoda, że w rozdziale drugim nie ma omówionego podejścia mezoskopowego do modelu Kawasaki tak jak to się robi w punktach (3.2) i (3.3).

11. Po wprowadzeniu modelu Widoma-Rowlinsona należałoby przypomnieć jego interpretację.

12. W dodatku przestrzeń Banacha X jest wprowadzona abstrakcyjnie. Warto byłoby tu wspomnieć, że w pracy X to jest albo L^1 , albo przestrzeń odpowiednich miar z normą wahania skończonego. To jest dość ważne, bo w drugim przypadku nie ma zbyt dużo podzbiorów gęstych.

Konkluzja. Uważam, że rozprawa doktorska Joanny Barańskiej spełnia wymagania ustawowe. Wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki