

dr hab. Michał Wojtylak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego
email: michal.wojtylak@im.uj.edu.pl

Recenzja Rozprawy Doktorskiej Pani magister **Joanny Jurasik**
Własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza
w postępowaniu prowadzonym na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Rozpatrywana Rozprawa Doktorska dotyczy obciętych operatorów Toeplitza, jest to tematyka na pograniczu analizy zespolonej i teorii operatorów. Głównym obiektem rozprawy są operatory liniowe w przestrzeni Hilberta zadane wzorem

$$A_{\phi}^{\alpha,\beta} : H^2 \ominus \alpha H^2 \rightarrow H^2 \ominus \beta H^2,$$
$$A_{\phi}^{\alpha,\beta} f = P_{\beta}(\phi f), \quad f \in H^2 \ominus \alpha H^2,$$

gdzie H^2 jest przestrzenią Hardy'ego na dysku, α, β są funkcjami wewnętrznymi, P_{β} oznacza projekcję na $H^2 \ominus \beta H^2$ oraz $\phi \in L^2$. Przestrzeń $H^2 \ominus \alpha H^2$, nazywana często przestrzenią modelową, może być skończenie lub nieskończenie wymiarowa, zależnie od wyboru funkcji wewnętrznej α , natomiast w Rozprawie rozważane są wyłącznie ograniczone operatory. Dla operatora $A_{\phi}^{\alpha,\alpha}$ przyjęta jest w literaturze nazwa *obcięty operator Toeplitza*, natomiast operatory $A_{\phi}^{\alpha,\beta}$ zostały nazwane *obciętymi asymetrycznymi operatorami Toeplitza*. Ideą Rozprawy jest przeniesienie znanych rezultatów dla obciętych operatorów Toeplitza ($\alpha = \beta$) na przypadek asymetrycznych operatorów Toeplitza (α, β dowolne funkcje wewnętrzne). Jest to często nietrywialne zadanie, wymagające nowych dowodów, o czym będzie jeszcze mowa poniżej.

Obcięte operatory Toeplitza przyciągają uwagę wielu znakomitych matematyków. Już C. Foiaś i B. Sz. Nagy pokazali, że operatory $A_z^{\alpha,\alpha}$ są modelami dla szerokiej klasy kontrakcji, innymi słowy, że każda kontrakcja spełniająca pewne dodatkowe założenia jest unitarnie równoważna $A_z^{\alpha,\alpha}$, przez z rozumiemy tu jednomian $\phi(z) = z$ (zob. [10]¹). Początkowo rozważane były jedynie

¹Wszystkie numery pozycji bibliograficznych odnoszą się do bibliografii Rozprawy

obcięte operatory Toeplitza $A_\phi^{\alpha,\alpha}$, intensywne badania nad nimi zrewitalizował w 2007 roku D. Sarason pracą [52]. Tematem zajmowali się od tej pory również m.in. H. Bercovici, D. Timotin, T. Ransford a niedawno, w 2016 roku, wydana została monografia S. Garcia, J. Mashregi, W. Ross [31].

Obcięte asymetryczne operatory Toeplitza $A_\phi^{\alpha,\beta}$ wprowadzili C. Cămară i R. Partington w pracach [15,16] (2016, 2017) oraz Doktorantka ze współautorami w pracy [14] (zob. poniżej). Podstawę oryginalnych wyników Rozprawy stanowią trzy artykuły:

[14] wspólnie z C. Cămară, K. Kliś-Garlicką i promotorem M. Ptakiem,

[40,41] wspólnie z opiekunem pomocniczym B. Łanuchą.

Wymienione wyżej trzy prace zostały już opublikowane w dobrych czasopiśmie o światowym zasięgu, np. praca [41] opublikowana została w czasopiśmie *Operators and Matrices*, tym samym, w którym znalazła się wspomniana już praca Sarasona z 2007 roku. Należy również pogratulować Doktorantce współpracy międzynarodowej [14]. Rozprawa wpisuje się więc bardzo dobrze w światowe badania naukowe a wybór tematu jest jednym z bardzo mocnych jej punktów.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. Pierwsze dwa mają charakter przygotowawczy, przywoływane są w nich podstawowe własności przestrzeni Hardy'ego, operatorów Toeplitza i obciętych operatorów Toeplitza. Oprócz drobnych lematów nie zawierają oryginalnych rezultatów Doktorantki, prezentują jednakże w solidny sposób podstawy teorii.

Rozdział trzeci, pomimo niewinnego tytułu, zawiera ważne twierdzenia uzyskane przez Doktorantkę dotyczące operatorów zerowych i operatorów rzędu jeden. Jest to bez wątpienia najciekawszy fragment Rozprawy. Szczególnie zwraca uwagę twierdzenie 3.9. Zawarta jest w nim pełna charakterystyka zerowych operatorów Toeplitza, czyli odpowiedź na pytanie dla jakich $\phi \in L^2$ mamy $A_\phi^{\alpha,\beta} = 0$. Twierdzenie to w przypadku $\alpha = \beta$ udowodnił Sarason w pracy [52]. Porównując dowód zamieszczony w rozprawie z oryginalnym dowodem Sarasona można naocznie się przekonać, że uogólnienie do przypadku $\alpha \neq \beta$ nie było automatyczne. Wręcz przeciwnie, podstawiając $\alpha = \beta$ w dowodzie z Rozprawy otrzymujemy nowy dowód twierdzenia Sarasona. W rozdziale trzecim na uwagę zasługuje również twierdzenie 3.12 – analiza asymetrycznych operatorów Toeplitza rzędu jeden i stwierdzenie 3.14

– obliczenie wymiaru przestrzeni asymetrycznych operatorów Toeplitza. Może dziwić, iż ten ostatni rezultat nie zasłużył na miano ‘twierdzenia’, moim zdaniem jest to jeden z istotniejszych wyników Rozprawy. Podsumowując, w Rozdziale trzecim rozważono podstawowe własności asymetrycznych operatorów Toeplitza, praktycznie niezbędne do jakichkolwiek dalszych badań w tej dziedzinie.

Rozdział czwarty, stanowiący znaczną część Rozprawy, rozważa problem macierzowej reprezentacji obciętych operatorów Toeplitza. Wyprowadzono tu sumiennie wzory na reprezentację macierzową w kilku wybranych bazach przestrzeni modelowych, kontynuując badania z pracy J. Cima, W. Ross, T. Wogen [19], w której to był rozpatrywany przypadek $\alpha = \beta$. Rozważono następujące bazy:

- bazę pochodzącą od funkcji jądrowych
- bazę pochodzącą od sprzężeń funkcji jądrowych
- bazę Clarka i zmodyfikowaną bazę Clarka.

Osobno rozpatrzono w Rozprawie przypadek skończenie i nieskończenie wymiarowy. Rozdział czwarty zawiera więc ogólnie analizę 20 różnych sytuacji. Zadanie jakie miała Doktorantka, czyli przejście od przypadku $\alpha = \beta$ do przypadku ogólnego, wymagało dużej technicznej wprawy. Uzyskane wyniki oraz ich systematyczne opracowanie świadczą o dobrym warsztacie matematycznym, pracowitości i cierpliwości Doktorantki. Szkoda, iż w Rozprawie nie znalazło się głębsze umotywowanie czy też kontekst tych badań. Czytelnik dosłownie zarzucany jest kolejnymi wzorami, a brakuje kilku prostych przykładów, obrazujących choćby zasugerowany we Wstępie związek z klasycznymi i prostokątnymi macierzami Toeplitza. Ogólnie jednak oceniam badania z rozdziału czwartego jako istotne i wartościowe, mogące w przyszłości stanowić podstawę kolejnych prac. Na przykład naturalne i intrygujące wydaje się pytanie o charakteryzację wszystkich macierzy $m \times n$ będące reprezentacjami macierzowymi $A_{\phi}^{\alpha, \beta}$ dla pewnego $\phi \in L^2$ i pewnych funkcji wewnętrznych α, β . Dalsze badania w tym kierunku mogą również pomóc w zrozumieniu odpowiedzi na pytanie postawione w [20] (J. Cima, S. Garcia, W. Ross, W. Wogen, 2010), czy każdy operator jest unitarnie równoważny jakiemuś obciętym operatorowi Toeplitza.

Od strony matematycznej rozprawa napisana jest poprawnie, widać dużą ilość pracy włożoną przez Doktorantkę. Autorka w sprawny sposób korzysta

z narzędzi teorii operatorów i analizy zespolonej jednej zmiennej. Redakcja pracy też jest na dobrym poziomie, choć można mieć pewne drobne uwagi:

- Nazwa *asymetryczne obcięte operatory Toeplitza* jest myląca i ciężka w użyciu, jak można się było przekonać już na początku niniejszej recenzji. W Rozprawie pojawiają się również operatory C_α -symetryczne, co wprowadza dodatkowe zamieszanie. Na Doktorantkę, jako współautorkę jednej z pierwszych prac, spada również odpowiedzialność za dobór nazewnictwa.
- Wymienione we Wstępie s.7 l.12 w kontekście teorii sygnałów, teorii sterowania, probabilistyki, teorii aproksymacji i problemu dyfrakcji fal referencje [1,3,7,8,34,38,55] nie do końca dotyczą wymienionych dziedzin, a już na pewno nie są klasycznymi pozycjami bibliograficznymi, które należałoby tu zacytować.
- Symbol z oznacza w pracy zarówno zmienną jak i jednomian, jest to często spotykana konwencja, jednakże nadużywana przez Autorkę, co niekiedy utrudnia lekturę, zob. np. s. 63 l.-4.
- Użycie równocześnie ϕ i φ we wzorach nie powinno mieć miejsca.
- Pisownia nazwisk zawierających znaki diakrytyczne jest niekonsekwentna (np. Càmara vs. Foias) lub błędna (Pad zamiast Padé).

Na plus można za to zaliczyć dobrze zredagowane indeks i spis oznaczeń.

Podsumowując, Rozprawa Doktorska Pani magister Joanny Jurasik spełnia ustawowe i zwyczajowe kryteria stawiane rozprawom doktorskim. Jest to bez wątpienia oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Rozprawa wykazuje również ogólną wiedzę matematyczną oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej przez Doktorantkę. Wnioskuje więc o przeprowadzenie dalszych czynności przewodu doktorskiego.

Kraków, 31. lipca 2018

