

UNIwersytet im. Adama Mickiewicza

Wydział Matematyki i Informatyki

ul. Umultowska 87 61-614 Poznań

Tel: +48 61 829 53 11

Fax: +48 61 829 53 15

E-mail: wmiuam@amu.edu.pl

Poznań, 30 lipca 2018 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Joanny Jurasik
pt. „Własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza”**

Operatory Toeplitza pojawiły się ponad sto lat temu w pracy Otto Toeplitza pt. „Zur theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen” (Math. Ann. **70** (1911), 351–376). Prace Hartmana i Wintnera oraz Browna i Halmosa ([37], [13]; numeracja z bibliografii rozprawy doktorskiej) z połowy ubiegłego wieku zapoczątkowały intensywne badania tych operatorów na klasycznej przestrzeni Hardy’ego H^2 jak i rozmaitych ich uogólnień. W chwili obecnej jest to jedna z najlepiej zbadanych i opisanych klas operatorów na przestrzeni Hilberta.

W roku 2007 Sarason zdefiniował i badał operatory Toeplitza na podprzestrzeni przestrzeni H^2 , tzw. *przestrzeni modelowej* K_α , będącej dopełnieniem ortogonalnym właściwej podprzestrzeni niezmienniczej αH^2 operatora przesunięcia jednostronnego S wyznaczonej przez funkcję wewnętrzną α . Dokładniej, dla funkcji $\varphi \in H^2$ operator A_φ jest zdefiniowany na gęstej podprzestrzeni $K_\alpha \cap H^\infty$ wzorem

$$A_\varphi f = P_\alpha(\varphi f),$$

gdzie P_α jest rzutem ortogonalnym przestrzeni L^2 (na okręgu jednostkowym) na podprzestrzeń $K_\alpha = H^2 \ominus \alpha H^2$. *Obcętym operatorem Toeplitza* o symbolu φ jest rozszerzenie operatora A_φ do operatora ograniczonego na przestrzeni K_α (jeżeli takie rozszerzenie istnieje).

Naturalnym uogólnieniem pojęcia obciętego operatora Toeplitza jest tzw. *asymetryczny operator Toeplitza*, który działa pomiędzy przestrzeniami K_α i K_β (α i β są dwiema, być może różnymi, funkcjami wewnętrznymi) oraz jest ograniczonym rozszerzeniem operatora zdefiniowanego wzorem

$$A_\varphi^{\alpha,\beta} f = P_\beta(\varphi f) \quad \text{dla } f \in K_\alpha \cap H^\infty.$$

Asymetryczne obcięte operatory Toeplitza zostały zdefiniowane przez Cămarę i Partingtona w pracy [16] z 2016 roku, a następnie badane przez tych Autorów [15] oraz przez Cămarę, Kliś-Garlicką, Ptaka i Doktorantkę w pracy [14].

Praca doktorska Pani Joanny Jurasik dotyczy badania własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza. Omówię pokrótce jej treść. Składa się ona

ze wstępu i czterech rozdziałów. Wstęp zawiera rys historyczny oraz zwięzły opis najważniejszych faktów i wyników przedstawionych w dalszej części rozprawy.

Rozdział pierwszy zatytułowany „Wiadomości wstępne” zawiera podstawowe oznaczenia, definicje i twierdzenia dotyczące klasycznej przestrzeni Hardy’ego H^2 i operatorów Toeplitza.

Rozdział drugi, „Obcięte operatory Toeplitza”, jak sam tytuł wskazuje, poświęcony jest uogólnieniu operatorów Toeplitza jakim są tzw. obcięte operatory Toeplitza. Omówione są w nim kolejno: przestrzenie modelowe i ich przekształcenia, bazy przestrzeni modelowych zarówno w przypadku skończonych, jak i nieskończonych, iloczynów Blaschkego, obcięte operatory Toeplitza oraz ich charakteryzacja za pomocą macierzy w różnych bazach przestrzeni modelowej.

Główną część rozprawy tworzą rozdziały trzeci i czwarty, zawierające oryginalne wyniki uzyskane przez Doktorantkę we wspomnianej już pracy [14], jak i pracach (wspólnych z Promotorem pomocniczym B. Łanuchą) [40] i [41].

Rozdział trzeci zatytułowany „Podstawowe własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza” rozpoczyna się od definicji tych operatorów oraz ich przestrzeni $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$. Następnie omówione są przekształcenia przestrzeni $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$. Głównymi wynikami zawartymi w tym rozdziale są: twierdzenie 3.9, podające warunki konieczne i dostateczne na to, aby operator $A_{\varphi}^{\alpha, \beta}$ był operatorem zerowym i twierdzenie 3.12, w którym zostały scharakteryzowane asymetryczne operatory Toeplitza rzędu pierwszego. Ponadto w rozdziale tym wyznaczony jest wymiar i opisane są bazy przestrzeni $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$ w przypadku, gdy funkcje α i β są skończonymi iloczynami Blaschkego.

Rozdział czwarty, „Charakteryzacje asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza za pomocą ich macierzy” jest podzielony na dwie części. Część pierwsza dotyczy charakteryzacji asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza w przypadku, gdy funkcje α i β są skończonymi iloczynami Blaschkego, a więc wtedy, gdy przestrzeń $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$ jest skończenie wymiarowa. Głównym problemem technicznym, który Doktorantka musiała pokonać jest fakt, że funkcje α i β mogą mieć wspólne zera. Rozważane są trzy rodzaje baz w przestrzeniach K_{α} i K_{β} : bazy utworzone z funkcji jądrowych, bazy utworzone ze sprzężeń funkcji jądrowych i bazy Clarka. W związku z tym jest dziewięć wariantów opisu operatora $A_{\varphi}^{\alpha, \beta}$ za pomocą jego macierzy względem baz w przestrzeniach K_{α} i K_{β} .

Druga część tego ostatniego rozdziału dotyczy przypadku, gdy przestrzenie K_{α} i K_{β} są nieskończenie wymiarowe, więc gdy funkcje α i β są nieskończonymi iloczynami Blaschkego. Wówczas w K_{α} i K_{β} istnieją przeliczalne bazy Riesz’a utworzone z funkcji jądrowych lub ze sprzężeń funkcji jądrowych wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyny Blaschkego α i β mają jednostajnie odseparowane zera. Natomiast przy pewnych innych założeniach (np. gdy zera nieskończonego iloczynu Blaschkego mają co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skupienia) istnieją również przeliczalne bazy Clarka w tych przestrzeniach. Przy wspomnianych założeniach dotyczących funkcji Blaschkego udowodnione są charakteryzacje asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza za pomocą ich macierzy. Podobnie jak w przypadku skończenie wymia-

rowym rozważone zostało dziewięć możliwych przypadków. Twierdzenia te są więc uogólnieniami klasycznego wyniku z teorii operatorów, który mówi, że ograniczony operator liniowy na przestrzeni H^2 jest operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz względem bazy $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ jest macierzą Toeplitza. Taka macierzowa charakteryzacja operatorów na przestrzeni Hilberta jest nie zawsze możliwa, dlatego wyniki uzyskane w tej części rozprawy są, moim zdaniem, najciekawsze i najwartościowsze.

Przejdę teraz do oceny rozprawy doktorskiej. Strona redakcyjna jest bardzo dobra. Praca napisana jest jasno i poprawnie. Obszerna część wstępna ułatwia czytanie tej rozprawy. Czytelnik znajdzie w niej wszystkie fakty potrzebne do zrozumienia rozumowań w części zasadniczej, czyli w rozdziałach trzecim i czwartym. Praca jest bardzo „techniczna”, zawiera mnóstwo dość skomplikowanych wzorów. Pomimo to nie udało mi się w nich znaleźć żadnego błędu, ani nawet „literówki”. Nie zauważyłem również żadnych błędów merytorycznych.

Na osobnych kartkach dołączyłem niewielką listę drobnych błędów językowych i drukarskich. Oczywiście te błędy są nieistotne i nie mają wpływu na ocenę pracy.

Moja ocena rozprawy doktorskiej Pani mgr Joanny Jurasik jest bardzo pozytywna. Badanie różnych uogólnień klasycznych operatorów Toeplitza należy do ciągle aktualnych i ważnych zagadnień w teorii operatorów. Pani Jurasik uzyskała ciekawe i oryginalne wyniki w zakresie tej problematyki. Są one już w większości opublikowane. Wykazała się przy tym bardzo dobrą znajomością literatury i doskonałym opanowaniem „rzemiosła”.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **praca doktorska Pani mgr Joanny Jurasik spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim w art. 13 ust. 1 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dn. 14 marca 2003 r. (Dz.U. Nr 65, poz. 595, z późniejszymi zmianami)** i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Dr hab. Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu