

Rozprawa doktorska

"Zagadnienia gęstości w sensie Turána dla grafów i hipergrafów"

Kamil Powroźnik

Streszczenie

Przedmiotem rozprawy doktorskiej są zagadnienia gęstości w sensie Turána dla grafów i hipergrafów. Nazwa problemu pochodzi od nazwiska węgierskiego matematyka Pála Turána, który sformułował następujący problem. Dla danego grafu $G = (V(G), E(G))$ i liczby naturalnej n chcemy wyznaczyć maksymalną liczbę krawędzi (tzw. liczbę Turána $ex(G, n)$) w grafie o liczbie wierzchołków równej n , który nie zawiera grafu G jako podgrafu. Każdy graf rzędu n o powyższej własności nazywamy grafem ekstremalnym względem grafu G .

Inny problem typu Turána opiera się na rozpatrywaniu grafu G wraz z funkcją określoną na zbiorze krawędzi $f : E(G) \rightarrow (0, 1]$ (funkcja ta przyporządkowuje każdej krawędzi w grafie G wartość, którą będziemy nazywać gęstością danej krawędzi). Polega on na wyznaczeniu warunków, jakie musi spełniać zadana funkcja f , by zapewnić istnienie danego grafu G jako podgrafu w każdym $|V(G)|$ -dzielny grafie $B[G]$ o gęstościach krawędziowych wyznaczonych przez funkcję f , gdzie $B[G]$ nazywamy *rozdmuchanym grafem*, który jest zdefiniowany następująco

1. każdy wierzchołek $i \in V(G)$ zastępujemy przez klastę A_i (zbiór niezależnych wierzchołków),
2. jeżeli wierzchołki $i, j \in V(G)$ są sąsiednie w G (czyli istnieje krawędź $e = ij \in E(G)$), to tworzymy krawędzie w $B[G]$ pomiędzy elementami klast A_i oraz A_j (niekoniecznie wszystkie, lecz co najmniej jedną).

Graf G nazywamy *transwersalą* w rozdmuchanym grafie $B[G]$, jeżeli istnieje homomorfizm $\phi : V(G) \rightarrow V(B[G])$ taki, że $\phi(i) \in A_i$ dla wszystkich wierzchołków $i \in V(G)$.

Dla pary klast A_i oraz A_j w rozdmuchanym grafie $B[G]$, gdzie $e = ij \in E(G)$, *gęstość krawędziową* $d_e = d(A_i, A_j)$ określamy jako sumę wag krawędzi pomiędzy tymi klastami podzieloną przez iloczyn wag tych klast.

Problem gęstości w sensie Turána sprowadza się do wyznaczenia tzw. gęstości krytycznej (ujęcie jednorodne) albo zbudowania algorytmu sprawdzającego, czy zadana funkcja f zapewnia istnienie transwersali G w dowolnym rozdmuchanym grafie $B[G]$ o określonej

gęstości krawędziowej pomiędzy klastrami (ujęcie niejednorodne). W pracy przedstawione zostały znane wyniki dotyczące problemu gęstości Turána dla różnych klas grafów, w tym dla drzew i cykli. Inspiracją do badań były przede wszystkim prace [3], [4] oraz [5]. Ponadto, opisane zostały wyniki własne, które są rozszerzeniem problemu gęstości w sensie Turána na inne klasy grafów i hipergrafaów (zawarte m.in. w opublikowanych pracach [1] i [2]).

Gęstością krytyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę d , która zapewnia istnienie transversali G w każdym rozdmuchanym grafie $B[G]$, w którym wszystkie gęstości krawędziowe d_e spełniają warunek $d_e > d$.

W pracy pojęcie gęstości krytycznej zostało rozszerzone na hipergrafy oraz przedstawiono jej dolne i górne ograniczenia dla 3-jednolitych liniowych hiperdrzew. Ograniczenia te są wyrażone za pomocą maksymalnej wartości własnej macierzy sąsiedztwa hiperdrzewa. Ponadto, podano strukturę hiperkrawędziową optymalnej konstrukcji ekstremalnego hipergrafu dla tego rodzaju hiperdrzew.

Niech $\{\gamma_e\}_G$ będzie zbiorem gęstości na krawędziach w grafie G wyznaczonym przez funkcję f . Mówimy, że zbiór $\{\gamma_e\}_G$ zapewnia istnienie transversali G , jeżeli w każdym rozdmuchanym grafie $B[G]$, którego wszystkie gęstości krawędziowe d_e spełniają warunek $d_e \geq \gamma_e$, graf G jest transversalą.

W rozprawie doktorskiej sformułowano i udowodniono twierdzenia opisujące warunki konieczne i dostateczne na to, aby dany zbiór gęstości na krawędziach zapewniał istnienie transversali dla przypadków: grafów jednocyklicznych z cyklem C_3 , jednohipercyklicznych liniowych hipergrafów z hipercyklem C_3 oraz liniowych hiperdrzew. Dodatkowo, w pracy sformułowano i udowodniono poprawność algorytmów pozwalających na sprawdzenie w efektywny sposób, czy dany zbiór gęstości zapewnia, czy też nie, istnienie transversali dla wspomnianych grafów i hipergrafów w ich rozdmuchanych grafach (hipergrafach).

W dowodach twierdzeń zostały wykorzystane metody optymalizacji, algebry liniowej, teorii spektralnej grafów oraz pojęcie wielozmiennego wielomianu skojarzeniowego dla grafów i hipergrafów.

Postawiono również problemy otwarte do dalszych badań.

Wybrane pozycje z bibliografii:

- [1] H. BIELAK, K. POWROŹNIK, *An efficient algorithm for the density Turán problem of some unicyclic graphs*, Annals of Computer Science and Information Systems Proceedings of the 2014 FedCSIS 2 (2014) 479–486, <http://dx.doi.org/10.15439/978-83-60810-58-3>.
- [2] H. BIELAK, K. POWROŹNIK, *The density Turán problem for some 3-uniform unihypercyclic linear hypergraphs. An efficient testing algorithm*, Annals of Computer Science and Information Systems Proceedings of the 2015 FedCSIS 5 (2015) 563–571, <http://dx.doi.org/10.15439/2015F260>.
- [3] A. BONDY, J. SHEN, S. THOMASSÉ, C. THOMASSEN, *Density conditions for triangles in multipartite graphs*, Combinatorica 26 (2) (2006) 121–131.
- [4] P. CSIKVÁRI, Z.L. NAGY, *The density Turán problem*, Comb. Probab. Comput. 21 (2012) 531–553.
- [5] Z.L. NAGY, *A multipartite version of the Turán problem - density conditions and eigenvalues*, Electron. J. Comb. 18 (2011), #P46.

Lublin 07.05.2018r.

Kamil Powroźnik