

prof UZ, dr hab. Ewa Drgas-Burchardt
WMiE, Uniwersytet Zielonogórski
ul. Prof. Szafrana 4a
65-516 Zielona Góra

Zielona Góra, 23 lipca 2018 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Kamila Powroźnika pt. Zagadnienie gęstości w sensie Turána dla grafów i hipergrafów

Przedmiotem rozprawy doktorskiej mgra Kamila Powroźnika są problemy gęstości w sensie Turána dla grafów i hipergrafów. Badanie zagadnień tego typu zainicjował w roku 1907 Mantel i sformalizował w roku 1941 Turán stawiając pytanie o możliwie najmniejszą liczbę krawędzi n -wierzchołkowego grafu, który nie zawiera jako podgrafu danego grafu G . Każdy graf realizujący rozwiązanie tego problemu nazywamy ekstremalnym ze względu na G . Mantel rozwiązał problem w przypadku gdy G jest 3-wierzchołkowym cyklem, Turán uogólnił ten wynik formułując twierdzenie dla G będącego grafem pełnym o dowolnej, ustalonej liczbie wierzchołków. Implikowana przez te rezultaty struktura grafów ekstremalnych, czyli zbalansowanych grafów pełnych wielodzielnych, zainicjowała badanie rozdmuchanych grafów grafu G . Badania z tego zakresu skojarzone są z funkcją gęstości określoną na zbiorze krawędzi grafu G w kategoriach jej wpływem na istnienie transversali G . W ostatnich latach tematyka tego typu cieszy się zainteresowaniem wielu badaczy. Recenzowana rozprawa doktorska bazuje na rezultatach otrzymanych przez autorów: Bondy, Csikvári, Nagy, Shen, Thomassé, Thomassen.

Magister Kamil Powroźnik jako cel przedłożonej rozprawy doktorskiej wskazuje zbadanie problemów gęstości w sensie Turána dla nowych, wybranych klas grafów oraz uogólnienie uzyskanych wyników na liniowe hipergrafy. Praca, licząca 91 stron, wprowadza w rozdziale pierwszym podstawowe definicje, w rozdziale drugim pokazuje różne spojrzenia na problem gęstości, na pozostałych 70 stronach prezentuje głównie wyniki własne autora. Wszystkie, uzyskane w rozprawie rezultaty, są w mojej ocenie, merytorycznie poprawne. Praca jest zredagowana w sposób odpowiedni, zachowując reguły stosowane przy redagowaniu tego typu rozpraw, z zastosowaniem standardowych oznaczeń i cytowań. Mam uwagi negatywne do sformułowań samych twierdzeń (np. twierdzenia 3.3, 3.4). Przyznaję, że wypowiedzi twierdzeń zawartych w tej rozprawie niekiedy trudno zredagować jednak nie rozumiem dlaczego autor unika konstrukcji *jeżeli ... , to*. Znalazłam kilka uchybień językowych (np. *twierdzenie należące do*, *dla skrótu*, *dolna granica na moc zbioru*, *algorytm jest prawdziwy*, ...) oraz redakcyjnych. Te ostatnie dotyczą definicji grafu $B[G]$, klasy grafów, stożka dodatniego, macierzy redukowalnej, zbioru domkniętego. Autor kilkakrotnie zamienia słowa hipergraf oraz graf (strona 18, 37, 44), błędnie przypisuje zmienne krawędziom grafu na rysunku 3.2, błędnie wpisuje

jedną z wartości w tablicy 3.2, zbędnie wprowadza pojęcia cięć i ich mylące oznaczenia. Drobne zaniedbania edycyjne (brak założeń o t, r oraz nawiasów w twierdzeniu 2.4, brak założenia, że $r \geq 3$ (18₂), brak symbolu mocy zbioru (30⁸), użycie tego samego symbolu e dla krawędzi i wierzchołka (37₄), użycie słowa *wyjściowy* zamiast *wejściowy*, zamiana liter c na b (35⁹) oraz t na p (56₁₀)...) wywołują niepotrzebne wrażenie nieprecyzyjności wypowiedzi.

Wyniki rozprawy dotyczą problemu gęstości w sensie Turána w dwóch ujęciach: niejednorodnym i jednorodnym. Rezultaty związane z ujęciem niejednorodnym, przedstawione w rozdziale trzecim rozprawy, są zawarte w sześciu twierdzeniach i trzech algorytmach. Twierdzenia 3.3, 3.5 oraz 3.8 podają warunki na istnienie transwersali w rozdmuchanych grafach jednocyklicznych, rozdmuchanych hipergrafach jednocyklicznych oraz w liniowych hiperdrzewach. W dwóch ostatnich przypadkach dowody prowadzone są dla hipergrafów jednolitych, przy czym autor zauważa, że twierdzenia tego typu można sformułować i udowodnić dla hipergrafów niejednolitych. We wszystkich trzech przypadkach autor rozprawy podaje, bazujący na wcześniej wspomnianych twierdzeniach, algorytm sprawdzający czy odpowiednia transwersala istnieje. Ponadto, w każdym przypadku podany jest związek między pierwiastkami wielozmiennego wielomianu skojarzeniowego dla odpowiedniego grafu i jego podgrafu bądź hipergrafu i jego podhipergrafu. Ostatnie wyniki są reprezentowane w następnych trzech twierdzeniach, odpowiednio 3.4, 3.7 oraz 3.10. Wszystkie, otrzymane w tej części rozprawy rezultaty, uważam za interesujące. Autor wykazuje się znajomością trudnej, różnorodnej tematyki. Mankamentem jest fakt, że stosowane techniki dowodzenia bazują na technikach innych autorów, brakuje pierwiastka nowatorskiego.

Część druga rozprawy, zawarta w rozdziale czwartym, dotyczy problemu gęstości Turána w ujęciu jednorodnym. W tej części autor udowodnił trzy wartościowe twierdzenia: 4.12, 4.14 oraz 4.16. Pierwsze wskazuje górne oszacowania gęstości krytycznej 3-jednolitego liniowego hipergrafu, trzecie ograniczenia górne i dolne tego parametru w przypadku gdy hipergraf jest hiperdrzewem, drugie opisuje strukturę rozdmuchanego, nasyconego, 3-jednolitego liniowego hiperdrzewa bez odpowiedniej transwersali i bazuje na ciekawej konstrukcji 4.1. Twierdzenia zawarte w tej części rozprawy są interesujące, każde z nich wykorzystuje inny warsztat badawczy. Różnorodność ta podnosi wagę dowiedzionych faktów. Dostrzegam tutaj również nowatorskość wyrażoną zwłaszcza w twierdzeniu 4.14.

Podsumowanie

W mojej ocenie, rozprawa doktorska mgra Kamila Powroźnika pt. Zagadnienie gęstości w sensie Turána dla grafów i hipergrafów zawiera szereg interesujących wyników dotyczących trudnej tematyki. Rezultaty zawarte w rozprawie zostały już częściowo opublikowane, dokładniej mgr Kamil Powroźnik jest współautorem czterech prac z czego dwie ukazały się drukiem w *Annals of Computer Science and Information Systems* jako materiały konferencyjne dwóch konferencji FedCSIS 2014 oraz 2015. Wcześniej wypunktowane drobne mankamenty przedłożonej rozprawy nie obniżają

jej wartości merytorycznej. Stwierdzam, że rozprawa spełnia warunki określone w art. 13 ust. 1 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 roku i może być podstawą do nadania jej autorowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. W związku z powyższym, przedkładam Radzie Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS w Lublinie wniosek o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie mgra Kamila Powroźnika do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ewa Drgas-Burchardt

E. Drgas-Burchardt