

A. Paweł Wojda
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza,
Al. Mickiewicza 30
30-059 Kraków

Recenzja pracy doktorskiej

Kamila Powroźnika

Zagadnienia gęstości w sensie Turána dla grafów i hipergrafów

Rozprawa doktorska pana Kamila Powroźnika dotyczy problemu Turána. Praca składa się z czterech rozdziałów i podsumowania.

Pierwsze dwa rozdziały to wprowadzenie podstawowych dla pracy definicji (rozdział pierwszy) i omówienie ogólne problemu gęstości (rozdział drugi).

Także ja w mojej recenzji muszę zdefiniować kilka z mniej znanych pojęć, by uczynić recenzję lepiej zrozumiałą.

Grafem (hipergrafem) rozdmuchanym $B[G]$ grafu (hipergrafu) G nazywamy graf (hipergraf), w którym:

1. każdy wierzchołek $i \in V(G)$ zastępujemy przez klastery (tzn. niezależny zbiór wierzchołków) A_i ,
2. wierzchołek a z A_i może (choć nie musi) być połączony z $b \in A_j$ jeśli $ij \in E(G)$.

Każdy wierzchołek $i \in V(G)$ ma pewną wagę $w(i) \geq 0$. **Waga klastra A_i jest liczbą $w(A_i) = \sum_{x \in A_i} w(x)$** , wagą krawędzi $e = ij \in E(G)$ jest $w(e) = w(i)w(j)$. **Gęstością krawędziową $d(A_i, A_j)$ pomiędzy klasami A_i oraz A_j w rozdmuchanym grafie $B[G]$ jest**

$$d(A_i, A_j) = \frac{\sum_{e \in E(B[G]), e=xy, x \in A_i, y \in A_j} w(e)}{w(A_i)w(A_j)}$$

G jest **transwersalą** w rozdmuchanym grafie $B[G]$ jeśli istnieje homomorfizm $\phi : V(G) \rightarrow V(B[G])$ taki, że $\phi(i) \in A_i$ dla każdego $i \in V(G)$. Inaczej mówiąc,

jeśli G jest podgrafem $B[G]$ takim, że każdy wierzchołek jest w *swoim* klastrze, homomorfizm $\phi : V(G) \rightarrow V(B[G])$ oznacza bowiem, że jeśli $ij \in E(G)$ wówczas $\phi(i)\phi(j) \in E(B[G])$.

Problem gęstości Turána to problem określenia warunków, które wymuszają by G był transversalą swojego grafu rozdmuchanego w powyżej zdefiniowanym sensie. Nagy [31] udowodnił następujące twierdzenie (w rozprawie cytowane jako twierdzenie 2.16):

Niech G będzie grafem o r wierzchołkach i k krawędziach zaś $B[G]$ takim grafem rozdmuchanym grafu G , że w każdym klastrze jest n wierzchołków. Jeśli G nie jest transversalą $B[G]$, wówczas rozmiar (liczba krawędzi) grafu $B[G]$ wynosi co najwyżej $(k-1)n^2$.

(Sposób zacytowania tego twierdzenia kwestionuję w uwagach szczegółowych.)

W rozdziałach trzecim i czwartym rozprawy zamieszczono wszystkie wyniki składające się na jej osiągnięcia. By uniknąć powtórzeń w recenzji, powiedzmy w tym miejscu, że wszystkie te wyniki, to jest twierdzenia i algorytmy, są rezultatami osiągniętymi i w większości opublikowanymi wspólnie z Haliną Bielak.

Trzeci rozdział rozprawy poświęcony jest tak zwanemu **niejednorodnemu** problemowi gęstości w sensie Turána. W problemie tym chodzi o znalezienie takiego zbioru gęstości $\{\gamma_e\}_{e \in E(G)}$ krawędzi grafu G by spełnienie nierówności $d_e \geq \gamma_e$ dla każdej krawędzi $e \in E(G)$, gdzie $d_e = d(A_i, A_j)$, zapewniało istnienie w $B[G]$ transversali G .

W 2012 roku Csikvári i Nagy udowodnili eleganckie twierdzenie dla drzew, w którym tak definiują gęstości w grafie $T' = T - v$, gdzie v jest wierzchołkiem wiszącym drzewa T , że nowe gęstości krawędzi w grafie T' wymuszają istnienie transversali T' w $B[T']$ wtedy i tylko wtedy, gdy gęstości krawędzi w drzewie wyjściowym T wymuszają istnienie transversali T w $B[T]$ (e jest krawędzią łączącą wierzchołki i oraz j grafu G , A_i klastrem grafu rozdmuchanego grafu G powstałym z wierzchołka i). Twierdzenie to cytowane jest w rozprawie jako twierdzenie 3.1.

Jak nietrudno się domyślić, Csikvári i Nagy podali wynikający z tego twierdzenia algorytm sprawdzający czy dany zbiór gęstości drzewa zapewnia istnienie transversali tego drzewa w jego grafie rozdmuchanym.

Autor rozprawy przedstawia inspirowane przez twierdzenie Csikváriego i Nagya twierdzenie dla grafów jednocyklicznych zawierających C_3 (twierdzenie 3.3). Dowód twierdzenia jest dość długi, zajmuje 6 stron tekstu. W rozprawie zamieszczono także Algorytm I sprawdzający, czy dany zbiór gęstości krawędzi zapewnia istnienie trans-

wersali jednocyklicznego grafu G z C_3 w rozdmuchanym grafie grafu G . Udowodnione w rozdziale wnioski 3.1 i twierdzenie 3.4 dotyczą twierdzenia 3.3 i Algorytmu I.

W dalszej części rozdziału trzeciego Autor przedstawia uogólnienia twierdzenia 3.3 na r -jednolite liniowe jednohipercykliczne hipergrafy z hipercyklem C_3 ($r \geq 2$). Idea funkcjonowania tego twierdzenia jest podobna do twierdzenia 3.3. I tym razem Autor przedstawia algorytm (Algorytm II) pozwalający sprawdzić, czy zdefiniowany na hiperkrawędziach hipergrafu G liniowego, r -jednolitego i jednocyklicznego z cyklem C_3 zapewnia istnienie transwersali G w $B[G]$.

Rozdział 3 zawiera także uogólnienie twierdzenia Csikváriego i Nagya na liniowe i r -jednolite hiperdrzewa T ($r \geq 2$, $|E(T)| \geq 2$). Także i w tym przypadku podano algorytm sprawdzający czy zbiór gęstości na krawędziach hiperdrzewa T zapewnia istnienie transwersali T w hipergrafie rozdmuchanym (Algorytm III).

Rozdział czwarty rozprawy jest poświęcony problemowi gęstości Turána w ujęciu jednorodnym.

W przypadku ujęcia niejednorodnego problemu Turána pytaliśmy o warunki na zbiór gęstości krawędziowych $\{\gamma_e\}_{e \in E(G)}$ takich, by spełnienie nierówności $d_e \geq \gamma_e$ dla każdego $e \in E(G)$ zapewniało istnienie transwersali G w grafie rozdmuchanym grafu G . W ujęciu jednorodnym szukamy najmniejszej liczby d takiej, by spełnienie warunku $d_e > d$ dla wszystkich krawędzi $e \in E(G)$ zapewniało istnienie transwersali G w $B[G]$. Taką liczbę d oznaczamy przez $d_{crit}(G)$.

Autor przedstawia ciekawe twierdzenia uzyskane przez Csikváriego i Nagya i innych autorów, dotyczące parametru $d_{crit}(G)$ grafu i zamieszcza wyniki (wspólne z Haliną Bielak i jeszcze nieopublikowane) będące uogólnieniami tych twierdzeń dla hipergrafów 3-jednolitych i liniowych. Wyniki te polegają między innymi na podaniu ograniczeń dolnych i górnych dla $d_{crit}(G)$.

W krótkim podsumowaniu swojej rozprawy doktorant wskazuje problemy otwarte, niektóre zresztą dość naturalne. Takim wręcz narzucającym się problemem jest znalezienie algorytmów testowania czy zbiór gęstości zapewnia istnienie transwersali w przypadku grafów jednocyklicznych lecz bez założenia, że jedyny cykl jest trójkątem.

Konkluzja

Zasygnalizowane w recenzji usterki nie mają wpływu na generalnie pozytywną ocenę rozprawy doktorskiej pana Kamila Powroźnika.

W części recenzji którą nazwałem *uwagami szczegółowymi* i umieściłem na końcu recenzji, podaję przykłady takich pomyłek.

W ocenie pracy doktorskiej pana Powroźnika **na szczególne podkreślenie zasługuje fakt podjęcia przez niego ambitnej tematyki w niełatwym ujęciu**. O ile wiem, poza panią Bielak i panem Powroźnikiem w Polsce nikt jeszcze nie zajmował się tak ujętą tematyką grafów ekstremalnych.

Praca jest dobrze napisana pod względem językowym i formalnym (właściwe są i odwołania do literatury jak i sama bibliografia pracy). Choć zdarzają się drobne niezręczności, o których wspominam w recenzji. Za bardzo cenne, ułatwiające zrozumienie czytelnikowi, uważam umieszczenie w rozprawie przykładów.

W związku z powyższym **rekomenduję Komisji d/s Przewodu Doktorskiego Kamila Powroźnika dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.

Uwagi szczegółowe

W rozdziale pierwszym (str. 11) zawarta jest między innymi definicja zawierania grafów. Istniejące sformułowanie jest błędne w tym sensie, że zupełnie nie oddaje prawdziwego znaczenia sformułowania *graf G zawiera G' jako podgraf*. Zawieranie grafów odgrywa w rozprawie zupełnie zasadniczą rolę i jak potem okazuje się w dalszej części rozprawy, Autor doskonale to pojęcie rozumie. Powstaje więc podejrzenie, że Autor celowo zamieścił ten błąd, by było w pracy coś, co recenzent może znaleźć by wykazać, że pracę przeczytał.

Tuż po definicji zawierania grafów jest objaśnienie określenia *podgrafu indukowanego*, z którego Autor, moim zdaniem, w ogóle w swojej pracy nie korzysta. To niejedyna taka sytuacja w rozprawie. Na tej stronie 11 autor definiuje (zresztą w sposób dość mało precyzyjny) graf skierowany, po czym pisze, że w rozprawie rozważane są wyłącznie grafy nieskierowane i tak jest rzeczywiście. Tak więc, definicja grafu skierowanego w rozprawie wydaje się zbędna.

Na stronie 13 (ciągłe rozdział pierwszy) Autor wspomina, że w grafach *każda krawędź łączy nie więcej niż 2 wierzchołki*. Taka definicja nie jest zgodna z definicją grafu ze strony 9 rozprawy. Także pojęcie *klaster* jest w pracy inaczej rozumiane niż je zdefiniowano na stronie 12.

Mam wątpliwości dotyczące definicji wag w grafie rozdmuchanym. Na stronie 24 pracy napisano o tym tak: *Załóżmy, że każdy wierzchołek $i \in V(G)$ ma przypisaną nieujemną wagę $w(i)$ Wagą klastra A_i w $B[G]$ określamy jako sumę wag wszystkich jego elementów, tj. $w(A_i) = \sum_{x \in A_i} w(x)$* . Nie wyjaśniono czym jest w takiej sytuacji waga $w(x)$ dla $x \in A_i$?

Na stronie 25 Autor rozprawy, moim zdaniem, błędnie cytuje twierdzenie 2.16 (twier-

dzenie Nagya) pisząc, że liczba n występująca w twierdzeniu jest rzędem grafu G . Ja zaś myślę, że n jest liczbą wierzchołków w każdym z klastrow. Wtedy to twierdzenie ma sens i łatwo sprawdzić, że określony w nim rozmiar grafu $(k - 1)n^2$ jest ekstremalny.

Na stronie 29 w przykładzie 3.1 wielomian skojarzeniowy $F_H(x_e, p)$ jest błędny (błąd można łatwo poprawić, na przykład przez zamianę x_1 z x_2 na rysunku 3.2).

Zauważone błędy nie wpływają nie mają negatywnych konsekwencji w dalszej części pracy. Dla przykładu, błędna definicja zawierania grafu jest najprawdopodobniej wynikiem pomyłki. Wszystko wskazuje na to, że autor w rzeczywistości zna prawidłową definicję i taką też stosuje.

Armenia