

**Recepcja**  
**rozprawy doktorskiej mgr Kingi Dąbrowskiej pt.**  
**”Liczby Ramseya dla grafów”**

O przygotowanie poniższej recenzji zwrócił się do mnie Dziekan Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS pan dr hab. Stefan Korczak, prof. nadzwyczajny UMCS. Powołał się przy tym na uchwałę Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS z dnia 25 czerwca 2018 roku.

Pani mgr Kinga Dąbrowska przygotowała rozprawę doktorską pod kierunkiem pani dr hab. Haliny Bielak, profesora nadzwyczajnego Uniwersytetu Marii Curie Skłodowskiej w Lublinie. Pani Dąbrowska jest współautorką 2 artykułów, w tym jednego opublikowanego w czasopiśmie z bazy czasopism MNiSW, a drugiego wysłanego do recenzji.

## 1 Wprowadzenie i przedstawienie problemu naukowego rozprawy

Twierdzenie, nazwane w późniejszych latach twierdzeniem Ramseya, zostało udowodnione przez Ramseya i opublikowane krótko po jego śmierci w 1930 roku. Jedno z jego możliwych, współczesnych sformułowań w języku teorii grafów mówi, że dla każdej liczby  $k \in \mathbb{N}$  istnieje liczba  $t \in \mathbb{N}$  taka, że dowolne pokolorowanie krawędzi grafu pełnego  $K_t$  dwoma kolorami zawiera monochromatyczny podgraf pełny rozmiaru  $k$ . Najmniejsze takie  $t$  nazywamy *liczbą Ramseya*. Pierwsza praca zawierająca wartości liczb Ramseya to opublikowana w 1955 roku praca Greenwood i Gleason. Sam Ramsey nie badał tego typu problemów.

Bardzo szybko popularne stały się liczby Ramseya dla grafów innych niż grafy pełne. Analogicznie definiuje się także liczby Ramseya dla większej liczby kolorów. Istnieje wiele tematów badań, wiele otwartych problemów i niewiadomych w teorii Ramseya, niektórymi z nich zajęła się rozprawa doktorska pani Kingi Dąbrowskiej. Wielu szeroko uznanych badaczy pracowało i pracuje nadal w tej tematyce. Teoria Ramseya ma szerokie zastosowanie w różnych działach matematyki i informatyki, spośród których wymienić można teorię liczb, algebrę, geometrię, topologię, logikę oraz teorię informacji. Wiele o zastosowaniach można przeczytać w przeglądowej pracy Rosty pod tytułem „Ramsey Theory Applications”.

Pani mgr Kinga Dąbrowska sformułowała następujące główne tezy rozprawy:

1. Liczba Ramseya  $R(P_m, K_1 + L_n)$  dla ścieżki rzędu  $m$ , lasu liniowego rzędu  $n$  z co najmniej jedną krawędzią, wynosi  $2m - 1$  dla  $m \geq n - 1 \geq 3$  gdy  $n$  jest parzyste i  $m \geq n \geq 3$  w przeciwnym przypadku.
2. Liczba Ramseya  $R(\underbrace{2P_5, 2P_5, \dots, 2P_5}_k, C_m) = m + 3k$ , gdy  $k \geq 1$  i  $m \geq \max\{9k^2 + k + 3, 15\}$ .
3. Liczba Ramseya  $R(\underbrace{3P_4, 3P_4, \dots, 3P_4}_k, C_m) = m + 5k$ , gdy  $k \geq 1$  i  $m \geq 25k^2 - 5k + 3$ .
4. Liczba Ramseya  $R(\underbrace{3P_4, 3P_4, \dots, 3P_4}_q, \underbrace{2P_5, 2P_5, \dots, 2P_5}_p, C_m) = m + 5q + 3p$  dla  $p + q \geq 1$  oraz  $m \geq \max\{15, 9p^2 + 25q^2 + 30pq + p - 5q + 3\}$ .

Główna teza rozprawy jak i pozostałe tezy zostały prawidłowo i jasno sformułowane. Sama zaś tematyka liczb Ramseya podjęta przez autorkę jest trudna ale i bardzo aktualna, o czym świadczy duża liczba ciekawych publikacji z tego tematu w ostatnich latach.

## 2 Omówienie wyników rozprawy wraz z uwagami

Przedstawiona rozprawa doktorska składa się z czterech rozdziałów, podsumowania, spisu rysunków i tablic a także z bibliografii.

Pierwsze dwa rozdziały to rozdziały wstępne, zawierają wprowadzenie do problematyki, potrzebne definicje, bogato prezentują dotychczasowe wyniki znane w literaturze. Na stronie 8 znajduje się wzmianka o najstawniejszym otwartym problemie z dziedziny liczb Ramseya. Autorka rozprawy nie zauważyła jednak, że w 2017 roku górna granica dla liczby  $R(5, 5)$  została obniżona z 49 na 48. W tych dwóch wspomnianych rozdziałach odnalazłem też kilka innych drobnych usterek, które przedstawiłem w załączniku do recenzji rozprawy.

Rozdział trzeci zawiera dowody twierdzeń dotyczących liczb Ramseya dla uogólnionych wiatraków i kół w połączeniu ze ścieżkami i cyklami. Bardzo podoba mi się wykorzystanie tak zwanej dobroci grafu oraz Twierdzenia Lina i innych, z którego wywiedziono kilka interesujących wniosków. Bardzo podoba mi się na przykład Twierdzenie 3.1.3 pokazujące wartość liczby Ramseya  $R(P_n, W_{t,m})$  dla pewnych warunków na  $n, m, t$ . Przy użyciu Twierdzenia Burra otrzymano jeden z głównych rezultatów pracy, a mianowicie wartość liczby  $R(P_m, K_1 + L_n)$  dla ścieżki rzędu  $m$ , lasu liniowego rzędu  $n$  z co najmniej jedną krawędzią. Uzyskano także podobny rezultat dla cykli  $C_m$  zamiast ścieżki  $P_m$ . Moim zdaniem wszystkie dowody w tym rozdziale są prawidłowe.

Rozdział czwarty zawiera dowody twierdzeń dotyczących multikolorowych liczb Ramseya dla lasów liniowych w parze z cyklem. W dowodach intensywnie wykorzystuje się rozmaite twierdzenia związane z liczbami Turána dla cykli i liniowych lasów różnej konstrukcji, w tym Twierdzenie Yuana i Zhanga z 2017 roku pokazującego wartość liczby  $ex(n, kP_3)$  dla wszystkich  $n$  i  $k$ . W rozdziale tym udowodniono trzy ostatnie główne tezy pracy a ponadto szereg innych twierdzeń, spośród nich bardzo podobały mi się dowody twierdzeń dla dwukolorowych liczb Ramseya  $R(2P_5, C_m)$  i  $R(3P_4, C_m)$  dla wszystkich  $m$ . Dowód tej drugiej liczby zawiera bardzo dużo czytelnych rysunków ułatwiających zrozumienie tekstu. W moim odczuciu wszystkie dowody są poprawne poza ostatnim, w moim odczuciu najmniej ważnym, dotyczącym liczby  $R(kP_3, C_m)$ , w którym na stronie 68 błędnie są policzone wartości  $m_1$  i  $m_2$  a także wywiedziono błędny wniosek o spełnialności pierwszej z nierówności.

Odnoszę wrażenie, że niektóre fragmenty dowodów w tym rozdziale można by połączyć. Można by tak zrobić na przykład dla przypadków  $m = 12$  i  $m = 14$  dla  $R(2P_5, C_m)$ , ale rozumiem intencję by tego nie robić dla zapewnienia większej czytelności niełatwych dowodów. Rozważyłbym podział tego najdłuższego rozdziału na kilka podrozdziałów. Pozostałe drobne uwagi zamieściłem w załączniku.

Na końcu pracy znajduje się jej podsumowanie. Autorka potwierdza w nim prawdziwość tez swojej rozprawy. Bibliografia pracy jest bardzo bogata, zawiera aż 117 pozycji. Widać, że była przygotowywana długo i nie do końca jest ona niestety aktualna. Dla przykładu ukazały się już prace 1, 32, 47, 93, 105, 106 a może i inne, które w bibliografii opisane są jako dostępne jedynie w bazie arxiv.

## 3 Ocena rozprawy

Moim zdaniem pani mgr Kinga Dąbrowska udowodniła prawdziwość tez swojej rozprawy doktorskiej. Udowodniła przy tym, że posiadała w stopniu właściwym odpowiednią wiedzę a także



umiejętności związane z właściwą metodyką prowadzenia badań naukowych w dyscyplinie matematyka. Moim zdaniem największą wartość pracy mają dowody głównych tez pracy, ale podobają mi się również wyniki dla dwukolorowych liczb Ramseya dla cykli i specjalnych liniowych lasów.

Praca jest generalnie napisana starannie choć znalazłem w tekście rozprawy bardzo wiele drobnych potknięć. Usterki te jednak nie wpływają na poprawność merytoryczną pracy (poza ostatnim twierdzeniem). Część usterek przedstawiłem powyżej, a resztę opisuję w załączniku.

Biorąc to wszystko pod uwagę uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie pani mgr Kingi Dąbrowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Toman Dudo

#### 4 Załącznik - lista pozostałych usterek rozprawy doktorskiej

Lista przedstawiona poniżej może być pomocna w przygotowaniu kolejnej wersji pracy:

1. rozważyć kolejne numerowanie wszystkich definicji, twierdzeń, spostrzeżeń, lematów, ta która jest obecnie utrudnia czasem czytanie pracy,
2. strona 3 i na kilku innych: Dynamic a nie Dinamic,
3. strona 6: podsumowanie jest na stronie 69 a nie 70,
4. strona 8: linia 5, definicja 1.1.1 zamiast 1.1,
5. strona 9: zamiast „nie wyznaczono dokładnej wartości” co widać z tabeli, dałbym nazwiska i/lub daty autorów oszacowań,
6. strona 10: linia 6, wydaje się, że zamiast powtórki o zbiorze wierzchołków i krawędzi, miało być, że graf jest bez pętli i multikrawędzi,
7. strona 10: linia 16, zamiast „ $E$ ” powinno być „ $E(G)$ ”,
8. strona 11: linia 2, ścieżka prosta nie była definiowana,
9. strona 12: sformułowanie Twierdzenia 2.1.4, jaka jest wartość liczby  $R(C_m, C_n)$  dla  $n = m = 3$ ?
10. strona 28: linia 4, brak nawiasu,
11. strona 31: niewyjaśnione pojęcie grafu ekstremalnego,
12. strona 31: Tw. 4.1.7 - niepotrzebnie „pochylone” nazwisko autora,
13. strona 39: co to jest graf  $G$ ?
14. strona 40: linia -7,  $C_{13}$  zamiast  $C_{11}$ ,

15. strona 43: linia -14, usunąć słowo „colour”,
16. strona 46: linia -10, usunąć „7”,
17. strona 48: błędny podpis rysunku, powinno być „ $3P_4$ ”,
18. strona 49: linia -8, błąd w słowie „wierzchołkami”,
19. strona 53: brak kropki na końcu zdania,
20. strona 56: linia -3, błąd w słowie „wierzchołki”,
21. strona 62: linia -1, powinno być  $N \geq m + \dots$ ,
22. strona 71: błędny podpis rysunku 4.6,
23. bibliografia: błąd w pozycji 77, niekonsekwencja pisania bibliografii, na przykład pozycje 62 i 67.