

Zielona Góra, dnia 10 sierpnia 2018r.

dr hab. Elżbieta Sidorowicz, prof. UZ
Wydział Matematyki Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja

rozprawy doktorskiej Pani mgr Kingi Dąbrowskiej
pt. *Liczby Ramseya dla grafów*

Tematem recenzowanej rozprawy doktorskiej są liczby Ramseya, w rozprawie zostały zaprezentowane wyniki dla dwukolorowych oraz multikolorowych liczb Ramseya, których parametrami są ścieżki, cykle, koła lub lasy liniowe. Rozprawa liczy 80 stron, składa się ze streszczenia, czterech rozdziałów, podsumowania i bibliografii, która obejmuje 117 pozycji.

W streszczeniu podany został krótki opis zagadnień badanych w poszczególnych rozdziałach rozprawy. W rozdziale pierwszym nakreślona została krótka historia tematyki i wprowadzone zostały wszystkie definicje i oznaczenia pozwalające omawiać podstawowe wyniki rozprawy. W rozdziale drugim omówione zostały znane wyniki dotyczące badanej tematyki, część z nich autorka wykorzystała w swoich dowodach. Zasadnicze wyniki rozprawy zawarte są w rozdziałach trzecim i czwartym.

W rozdziale trzecim wyznaczone zostały liczby Ramseya dla ścieżki i uogólnionego koła $W_{t,m} = K_t + C_m$ oraz dla grafu $K_1 + L_n$ w parze z cyklem, bądź ścieżką. W dowodzie liczby Ramseya dla ścieżki i uogólnionego koła Autorka wykorzystuje twierdzenie Lina et al. z 2010 roku, które mówi, że jeżeli drzewo T jest grafem G -dobrym i $s(G) = 1$, to T jest grafem $(K_1 + G)$ -dobrym. Graf spójny H jest G -dobry jeśli $R(G, H) = (\chi(G) - 1)(|V(H)| - 1) + s(G)$, gdzie $s(G)$ jest mocą najmniejszej klasy kolorów w dowolnym właściwym kolorowaniu grafu G . Wyniki dla ścieżki i uogólnionego koła wynikają bezpośrednio z tego twierdzenia oraz znanych liczb Ramseya dla ścieżki i cyklu oraz ścieżki i koła. Do wyznaczenia dolnego ograniczenia liczby Ramseya dla ścieżki i grafu $K_1 + L_n$ oraz cyklu i grafu $K_1 + L_n$ Autorka wykorzystuje twierdzenie Burra z 1981 roku, które podaje dolne ograniczenie liczby Ramseya dla dowolnej pary grafów. Górne ograniczenie dla tych liczb wynika z liczby Ramseya dla ścieżki i cyklu wyznaczonej przez Foudree et al. w 1974. Z równości ograniczenia górnego i dolnego otrzymujemy wartość $R(P_m, K_1 + L_n)$ i $R(P_m, K_1 + L_n)$.

W rozdziale czwartym, który jest najobszerniejszym rozdziałem rozprawy, zostały wyznaczone dwukolorowe oraz multikolorowe liczby Ramseya dla lasów liniowych z komponentami izomorficznymi do P_3, P_4 i P_5 w parze z cyklem. W szczególność zostały wyznaczone następujące multikolorowe liczby Ramseya:

$R(\underbrace{2P_5, \dots, 2P_5}_k, C_m) = m + 3k$ dla $k \geq 1$ i $m \geq \max\{9k^2 + k + 3, 15\}$ (twierdzenie 4.2.1),

$R(\underbrace{3P_4, \dots, 3P_4}_k, C_m) = m + 5k$ dla $k \geq 1$ i $m \geq 25k^2 - 5k + 3$ (twierdzenie 4.2.6),

$R(\underbrace{3P_4, \dots, 3P_4}_q, \underbrace{2P_5, \dots, 2P_5}_p, C_m) = m + 5q + 3p$ dla $p + q \geq 1$ i $m \geq \max\{9p^2 + 25q^2 + 30pq + p - 5q + 3, 15\}$ (twierdzenie 4.2.11).

Dowody tych twierdzeń, wyznaczających dokładną wartość liczby Ramseya N , polegają na pokazaniu, że N jest dolnym i górnym ograniczeniem liczby Ramseya. Dolne ograniczenie udowodnione zostało jest przez wskazanie odpowiedniego kolorowania krawędzi grafu pełnego K_{N-1} . W dowodzie górnego ograniczenia wykorzystane zostały liczby Turána. Każda liczba naturalna N spełniająca nierówność $\binom{N}{2} > \sum_{i=1}^m ex(N, H_i)$ (*) jest ograniczeniem górnym liczby Ramseya $R(H_1, \dots, H_m)$. Zatem jeżeli znamy liczby Turána $ex(n, H_i)$, to możemy wyznaczyć ograniczenie górne dla $R(H_1, \dots, H_m)$. Mam uwagi krytyczne do tej części rozprawy. W dowodach wykorzystujących liczby Turána Autorka wyznacza najmniejszą liczbę spełniającą nierówność (*) przeprowadzając szczegółowe rachunki i oszacowania, z których ustala założenia na m i k . Uważam, że w tym miejscu wystarczyło pokazać, że podana w twierdzeniu liczba N spełnia nierówność (*), przy założeniach podanych w twierdzeniu. Dowody byłyby wówczas bardziej czytelne i zrozumiałe. W dalszej części rozdziału czwartego Autorka, w podobny sposób jak wyżej, wyznacza dolne i górne ograniczenie $R(\underbrace{2P_5, \dots, 2P_5}_k, C_m)$ dla $k \geq 2$,

gdy m jest liczbą nieparzystą i $3 \leq m < \max\{3k+3, 10\}$ (twierdzenie 4.2.5), dolne i górne ograniczenie $R(\underbrace{3P_4, \dots, 3P_4}_k, C_m)$ dla $k \geq 2$, gdy m jest liczbą nieparzystą i $3 \leq m < 5k+3$ (twierdzenie 4.2.10) oraz dolne i górne ograniczenie $R(\underbrace{3P_4, \dots, 3P_4}_q, \underbrace{2P_5, \dots, 2P_5}_p, C_m)$

dla $p+q \geq 2$, gdy m jest liczbą nieparzystą i $3 \leq m < 3p+5q+3$ (twierdzenie 4.2.12). O ile dla multikolorowych liczb Ramseya Autorka otrzymała wyniki tylko przy dość mocnych założeniach na m , tak dla dwukolorowych liczb Ramseya $R(2P_5, C_m)$, $R(3P_4, C_m)$ problem został rozstrzygnięty dla wszystkich liczb $m \geq 3$. Wartości $R(2P_5, C_m)$ dla $m \geq 15$ wynikają z multikolorowej liczby Ramseya (twierdzenia 4.2.1), natomiast dla małych m , tzn. $3 \leq m \leq 14$, dowód został zrobiony osobno dla poszczególnych wartości m . Wyznaczenie tych liczb wymagało rozważeniu wielu przypadków, zostało to zrobione bardzo dokładnie i opisane w bardzo przejrzysty sposób. Autorka wykazała się dobrą znajomością dotychczasowych wyników związanych z liczbami Ramseya i dużą pomysłowością wykorzystując je do uzyskania nowych rezultatów. Podobnie $R(3P_4, C_m)$ dla $m \geq 23$ wynika z multikolorowej liczby Ramseya (twierdzenia 4.2.6), dla $3 \leq m \leq 22$ dowód został zrobiony osobno. Na końcu rozdziału czwartego zostały również wyznaczone liczby Ramseya $R(kP_3, C_m)$ dla pewnych wartości m i k .

Tematyka rozprawy jest aktualna i ważna dla współczesnej nauki, a uzyskane przez Autorkę rezultaty rozszerzają wyniki dotychczas uzyskane z tej tematyki. Część rezultatów przedstawionych w rozprawie ukazała się drukiem we wspólnej publikacji z Bielak. Warto podkreślić, że wyniki tej publikacji zostały zacytowane w pracy przeglądowej

S.P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey 1 (2017) #15. Kolejna publikacja z wynikami rozprawy jest złożona do druku. Za najważniejsze i najciekawsze wyniki rozprawy uważam wyznaczenie liczb Ramseya $R(2P_5, C_m)$ oraz $R(3P_4, C_m)$. W swojej rozprawie Autorka nie ustrzegła się jednak kilku usterek, które w pewnych miejscach rozprawy wprowadzają czytelnika w zakłopotanie. Dla przykładu poniżej przedstawię niektóre z nich (podana numeracja wskazuje numer strony i numer wiersza od góry lub od dołu strony).

21¹⁰– Oznaczenie $R_k(G)$ nie zostało zdefiniowane.

25²– Założenie " $m \geq 3$ " w tym miejscu jest niepotrzebne.

dowód twierdzenia 3.2.1

26– Ograniczenie dolne jest udowodnione w liniach 26⁷⁻⁹, fragmenty dowodu od 26¹ "*Zauważmy...*" do "...w tym przypadku." oraz od 26¹⁰ "*Zauważmy...*" do końca strony są niepotrzebne.

27³, 27⁶– Powinna być dopisana uwaga, że korzystamy z twierdzenia 4.1.4.

dowód twierdzenia 3.4.1

27₅– Brakuje założenia $n \geq 3$.

28– Podobnie, jak w wyżej, fragmenty dowodu od 28¹ "*Dla $m...$* " do linii 28⁶ oraz od 28¹⁰ "*Stąd...*" do 28¹⁵ "...ograniczenie górne." są niepotrzebne.

28₇– Powinno być dodane założenie $n \geq 4$.

28₅– Powinno być dodane założenie $n \geq 3$.

34⁹– Ogranicze dolne $\max\{18, m + 3k\}$ nie wynika z rozumowania przeprowadzonego w dowodzie spostrzeżenia 4.2.2, nie jest ono też tezą tego spostrzeżenia, więc jest niepotrzebne w tym miejscu. Ostatnie dwie linie dowodu spostrzeżenia 4.2.2 lepiej byłoby zapisać w postaci nowego spostrzeżenia lub uwagi.

38¹⁰– Zamiast " y_1, x_2, x_4, x_6, y_2 tworzą ścieżkę P_5 " powinno być " x_2, y_1, x_4, y_2, x_6 tworzą ścieżkę P_5 ".

dowód twierdzenia 4.2.4

39⁵– "*Z założenia nie istnieje $2P_5$ w grafie G .*" - Graf G nie został wprowadzony i nie zostały zrobione założenia o grafie G .

40⁹⁻¹⁰– "*Zauważmy, że $\{x_4, x_{2i+1}\} \in E(\overline{G})$ dla $i = 3, 4$.*" Uwaga ta jest niepotrzebna, ponieważ tych krawędzi nie wykorzystujemy, aby wykazać, że istnieje cykl C_{13} w $\overline{G}$.

41₈₋₉– "*Zauważmy, że $\{x_4, x_{2i+1}\} \in E(\overline{G})$ dla $i = 3, 4, 5$.*" Podobnie, jak wyżej, tej uwagi nie wykorzystujemy.

42⁸– Ze spostrzeżenia 4.2.1 wynika tylko dolne ograniczenie $m + 3k$, ograniczenie dolne 18 nie zostało udowodnione.

dowód twierdzenia 4.2.8

46₅– "*Najpierw rozważmy $m = 3, 5$.*" Przypadek 1 dotyczy tylko $m = 3$ lub $m = 5$, więc zdanie to jest niepotrzebne.

48¹⁻³– Na początku przypadku 2, powinno zostać zauważone, podobnie jak w pierwszym akapicie przypadku 1, że G zawiera P_8 i $\overline{G}$ zawiera C_6 .

49₇– Zamiast "*... dla pewnego i ...*" powinno być "*... dla wszystkich i ...*".

49₅– Zdanie "*W przeciwnym razie mamy cykl C_9 w $\overline{G}$.*" powinno być wyżej, po "*...modulo 12.*".

52⁷– Akapit w tym miejscu jest niepotrzebny.

Powyższe uwagi nie wpływają na moja ogólną, pozytywną ocenę rozprawy. Wyniki naukowe uzyskane przez mgr Kingę Dobrowską są oryginalne i rozszerzają znane rezultaty z tego zakresu oraz wnoszą pewien wkład w rozwój teorii grafów.

Podsumowując można stwierdzić, że mgr Kinga Dąbrowska przedstawiła wartościowe wyniki i wykazała się znajomością literatury i tematyki. Uważam, że rozprawa spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim w Ustawie o stopniach i tytule naukowym i wnioskuję o dopuszczenie mgr Kingi Dąbrowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Elżbieta Sidorowicz

Elżbieta Sidorowicz