

# Izooptyki wewnętrzne danego owalu a jego krzywe dualne

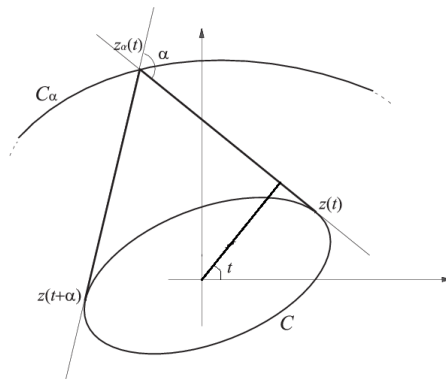
Magdalena Skrzypiec

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki  
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

19 czerwca 2018

## Definicja [Philippe de La Hire]

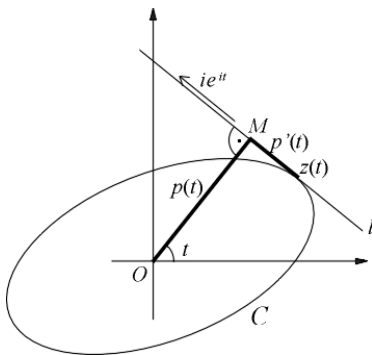
*Izooptyką  $C_\alpha$  danej krzywej  $C$  nazywamy zbiór punktów, z których krzywa  $C$  jest widziana pod ustalonym kątem  $\pi - \alpha$ .*



Zamkniętą, ściśle wypukłą krzywą płaską  $C$  można sparametryzować za pomocą funkcji podparcia, czyli zadać równaniem

$$z(t) = p(t)e^{it} + p'(t)ie^{it} \quad \text{dla } t \in [0, 2\pi), \quad (1)$$

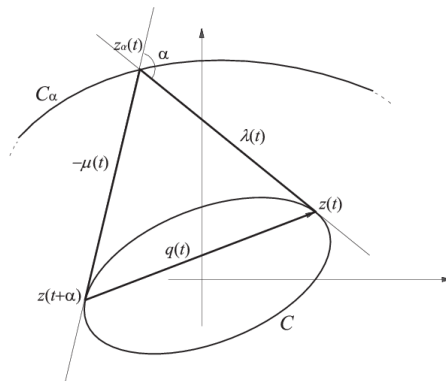
gdzie  $p(t)$  jest klasy  $C^2$ . Promień krzywizny tej krzywej  $R(t) = p(t) + p''(t)$  jest dodatni dla każdego  $t \in [0, 2\pi)$ .



Twierdzenie [W. C., S. G., A. M., W. M.]

Niech  $C$  będzie zamkniętą, ściśle wypukłą krzywą sparametryzowaną za pomocą funkcji  $p(t)$ , zaś  $\alpha \in (0, \pi)$  ustalonym kątem. Wówczas izooptykę  $C_\alpha$  krzywej  $C$  opiszemy wzorem

$$z_\alpha(t) = p(t)e^{it} + \left\{-p(t) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} p(t + \alpha)\right\} ie^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

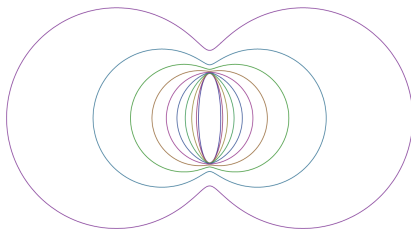


Dla niektórych krzywych izooptyki można określić za pomocą równania  $F(x, y) = 0$ .  
Na przykład dla elipsy danej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

równanie izooptyki ma postać

$$\frac{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)}{a^2 b^2} - 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$



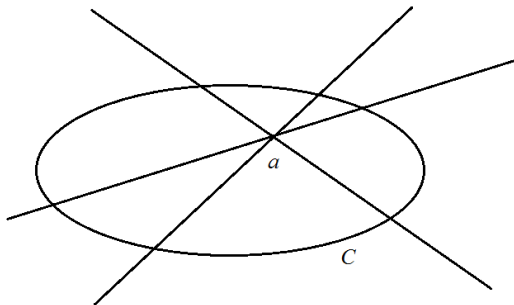
S. W. Bachwałow, P. S. Modenow, A. S. Parchomienko, *Zbiór zadań z geometrii analitycznej*, PWN Warszawa 1961.

Przez dołączenie do płaszczyzny euklidesowej  $\mathbb{E}^2$  horyzontu, czyli zbioru punktów niewłaściwych, w których przecinają się proste równoległe, otrzymujemy rzutowe rozszerzenie płaszczyzny euklidesowej  $\bar{\mathbb{E}}^2$ . Dołączone punkty tworzą prostą rzutową  $L_\infty$ .

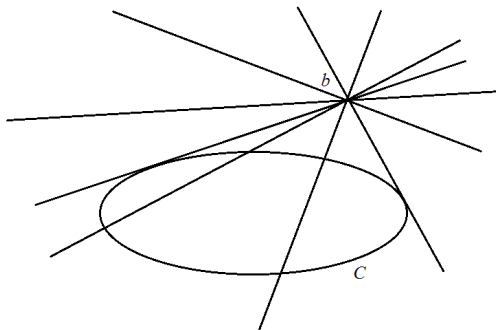
W tak otrzymanej strukturze  $\bar{\mathbb{E}}^2$ , złożonej z punktów i prostych rzutowych, wyróżniona jest prosta  $L_\infty$ . Jeśli zapomnimy, która prosta rzutowa została dołączona, to wszystkie proste (i punkty) staną się równouprawnione. Strukturę tę nazywamy płaszczyzną rzutową i oznaczamy  $\mathbb{P}^2$ .

Na płaszczyźnie rzutowej obowiązuje zasada dualności, w myśl której pojęcia i własności prawdziwe dla punktów są również prawdziwe dla prostych i na odwrót.

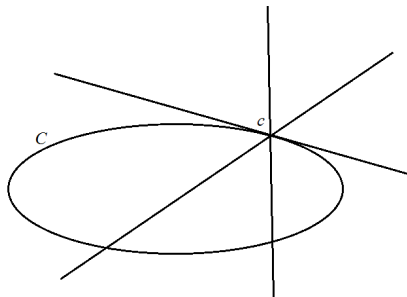
Zauważmy, że każdy owal jednoznacznie wyznacza swoje wnętrze i zewnątrz. Każdy punkt  $a$  jest punktem wewnętrznym owalu  $C$  wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta z pęku  $a^*$  jest sieczną.



Zauważmy, że każdy owal jednoznacznie wyznacza swoje wnętrze i zewnątrz. Jeśli punkt  $b$  jest punktem zewnętrznym, to pęk  $b^*$  zawiera proste sieczne, zewnętrzne i dokładnie dwie proste styczne do  $C$ .

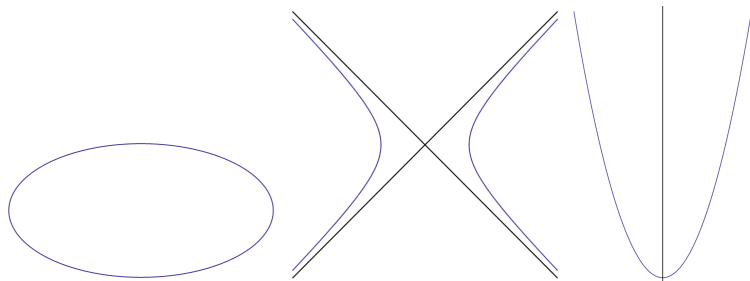


Zauważmy, że każdy owal jednoznacznie wyznacza swoje wnętrze i zewnątrz. Jeśli punkt  $c$  leży na  $C$ , to pęk  $c^*$  zawiera dokładnie jedną prostą styczną do  $C$  w punkcie  $c$ , a pozostałe proste w pęku  $c$  są siecznymi.



Powyższe własności nie ulegają zmianie, gdy każdą prostą  $A$  uzupełnimy jej kierunkiem  $[A]$ , czyli gdy płaszczyznę  $\mathbb{E}^2$  rozszerzymy do  $\mathbb{E}^2$ . Ponadto prosta  $L_\infty$  jest prostą zewnętrzną, bo każdy pęk  $[A]^*$  zawiera zarówno proste zewnętrzne jak i sieczne.

Ustalmy stożkową  $S$  na płaszczyźnie  $\mathbb{E}^2$  i dołączmy do  $\mathbb{E}^2$  prostą  $L_\infty$ . Otrzymamy wówczas  $\bar{\mathbb{E}}^2$  i rzutowe rozszerzenie  $\bar{S}$  stożkowej  $S$ . Gdy  $S$  jest elipsą, to  $\bar{S} = S$ , gdy  $S$  jest hiperbolą, to  $\bar{S}$  powstaje z  $S$  przez dołączenie kierunków jej asymptot, zaś gdy  $S$  jest parabolą, to przez dołączenie kierunku jej osi.

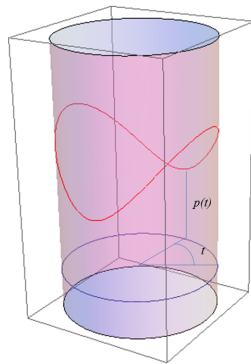
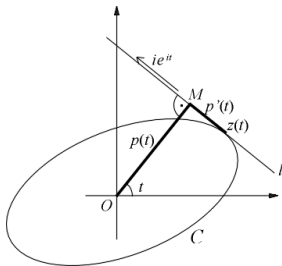


J. Fryda, E. Kasperek, *Stożkowe i konstrukcje Steinera z rzutowego punktu widzenia (część I)*, *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* nr 2 (1989), s. 41-48.

# Krzywe dualne do izoptyk

Dla izoptyk możemy rozważać ich krzywe dualne na cylindrze Blaschke'go  $\Gamma = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Ten dualizm oznacza, że pojedynczy punkt przestrzeni dualnej  $\Gamma$  odpowiada prostej w wyjściowej przestrzeni (see e.g. Jennings, G. A.: *Modern geometry with applications*, p. 145 i Godbillon, C.: *Éléments de topologie Algébrique*, p. 44, 151-153).

Niech  $C : z(t) = p(t)e^{it} + p'(t)ie^{it}$  będzie daną krzywą płaską, zamkniętą, ściśle wypukłą i niech  $C^* : \{(x, y, z) = (\cos t, \sin t, p(t)), t \in [0, 2\pi)\}$  będzie krzywą dualną do  $C$  na cylindrze  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .



# Krzywe dualne do izooptyk

Ustalmy kąt  $\alpha \in (0, \pi)$ . Dla ustalonego  $t \in [0, 2\pi)$  rozważamy płaszczyznę  $\pi(t)$  przechodzącą przez początek układu współrzędnych  $O = (0, 0, 0)$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  oraz punkty  $z^*(t) = (\cos t, \sin t, p(t))$  i  $z^*(t + \alpha) = (\cos(t + \alpha), \sin(t + \alpha), p(t + \alpha))$  na krzywej  $C^*$ . Przyjmując, że

$$z_\alpha(t) = x_\alpha(t) + iy_\alpha(t),$$

gdzie

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{\sin \alpha} (p(t) \sin(t + \alpha) - p(t + \alpha) \sin t),$$

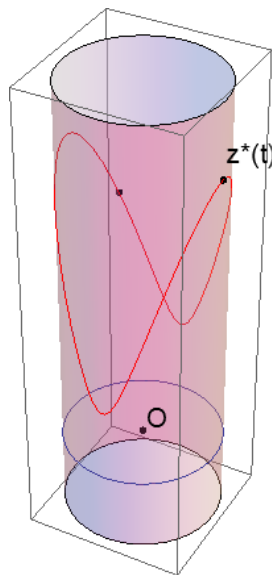
$$y_\alpha(t) = \frac{1}{\sin \alpha} (-p(t) \cos(t + \alpha) + p(t + \alpha) \cos t).$$

wektor normalny płaszczyzny  $\pi(t)$  ma postać

$$N(t, \alpha) = (x_\alpha(t), y_\alpha(t), -1).$$

Wektor styczny do izooptyki  $C_\alpha$  to

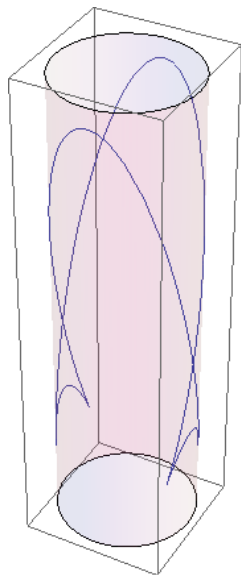
$$z'_\alpha(t) = x'_\alpha(t) + iy'_\alpha(t).$$

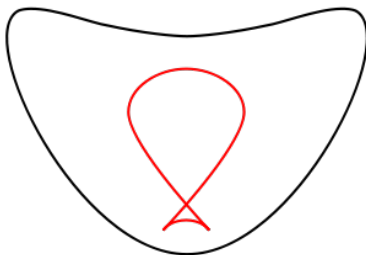


Krzywa  
dualna na  $\Gamma$  do izooptyki krzywej  $C$  jest postaci

$$C_{\alpha}^* = \left( \frac{y'_{\alpha}(t)}{|z'_{\alpha}(t)|}, \frac{-x'_{\alpha}(t)}{|z'_{\alpha}(t)|}, \frac{[z_{\alpha}(t), z'_{\alpha}(t)]}{|z'_{\alpha}(t)|} \right), \quad t \in [0, 2\pi),$$

gdzie  $[a + ib, c + id] = ad - bc$ .





Krzywe dualne możemy przedstawiać również na płaszczyźnie. Dla krzywej płaskiej, zadanej parametryzacją  $f(t) = (x(t), y(t))$ , krzywą dualną określają następujące równania parametryczne

$$X = \frac{-y'}{xy' - yx'}$$

$$Y = \frac{x'}{xy' - yx'}$$

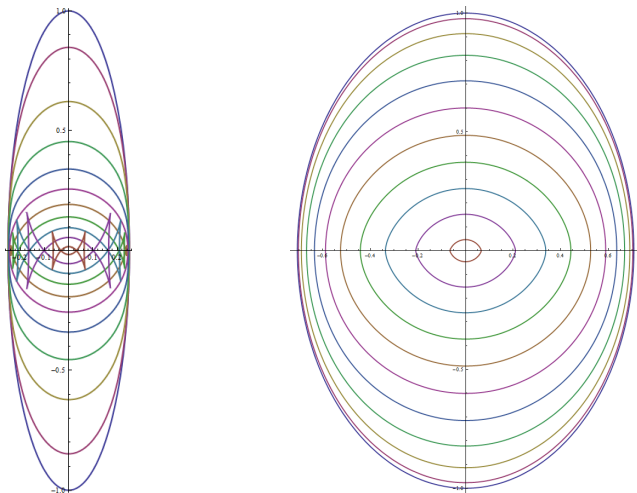


Wikipedia, [https : //en.wikipedia.org/wiki/Dual\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_curve)



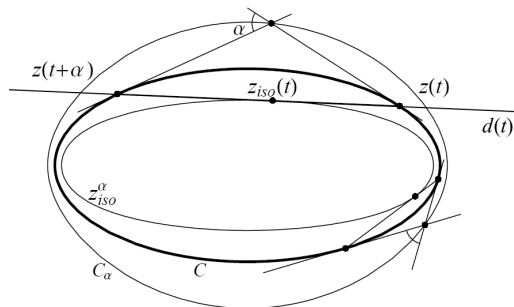
M. Monks, *Duality of Plane Curves*, 2011  
[https : //math.berkeley.edu/ monks/papers/DualityV3.pdf](https://math.berkeley.edu/~monks/papers/DualityV3.pdf)

# Krzywe dualne do izoptyk elipsy przedstawione na płaszczyźnie



Krzywe dualne do izoptyk elips

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1.$$



Izooptyką wewnętrzną danego owalu

$$C : z(t) = p(t)e^{it} + p'(t)ie^{it}$$

dla ustalonego  $\alpha$  nazywamy obwiednię rodziny wektorów  $q(t) = z(t) - z(t + \alpha)$ .

Możemy opisać ją wzorem

$$z_{\text{iso}^\alpha}(t) = z_{\text{iso}}(t) = P(t)E^{it} + P_{\text{prim}}(t)iE^{it},$$

gdzie

$$P(t) = -\frac{[z(t), q(t)]}{|q(t)|},$$

$$P_{\text{prim}}(t) = -\frac{[z', q] \cdot |q|^2 + \langle q, z \rangle \cdot [q, q']}{|q| \cdot [q, q']}(t),$$

$$E^{it} = \left\{ -\frac{[z(0), q]}{|z(0)| \cdot |q|}, \frac{\langle z(0), q \rangle}{|z(0)| \cdot |q|} \right\}(t) = J\left(\frac{q}{|q|}(t)\right),$$

$$iE^{it} = \left\{ -\frac{\langle z(0), q \rangle}{|z(0)| \cdot |q|}, \frac{[z(0), q]}{|z(0)| \cdot |q|} \right\}(t) = -\frac{q}{|q|}(t).$$



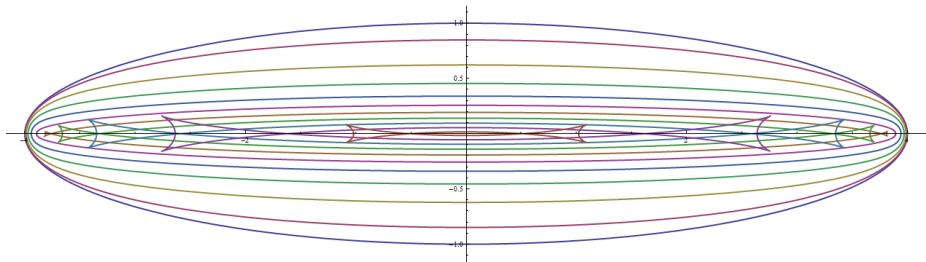
W. Mozgawa, *On billiards and Poncelet's porism*, Rend. Semin. Math. Univ. Padova, **120** (2008), pp. 157-166,



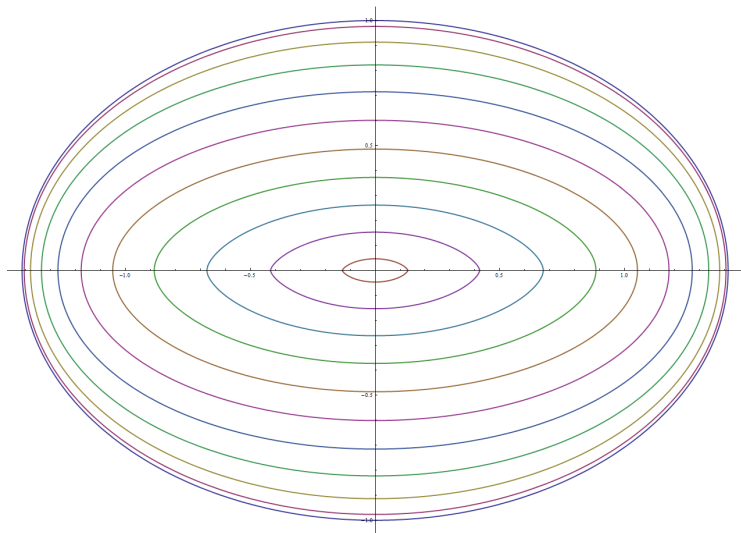
W. Mozgawa, *Integral formulas related to ovals*, Beitr. Algebra Geom. **50** (2009), pp. 555-561,



H. Martini, W. Mozgawa, *An integral formula related to inner isoptics*, Rend. Semin. Math. Univ. Padova, **125** (2011), pp. 39-49.



Izootyki wewnętrzne elipsy  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ .



Izootyki wewnętrzne elipsy  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

Przypomnijmy, że dla krzywej  $C$  zadanej parametryzacją krzywą dualną opisuje wzór

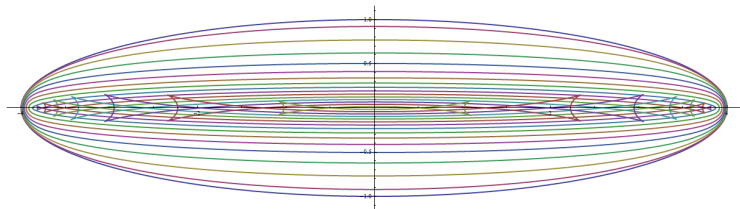
$$X = \frac{-y'}{xy' - yx'},$$
$$Y = \frac{x'}{xy' - yx'}.$$

Dla elipsy korzystamy z parametryzacji  $z(t) = p(t)e^{it} + p'(t)ie^{it} = x(t) + iy(t)$ , gdzie  $p(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$ , a dla izoptyk mamy

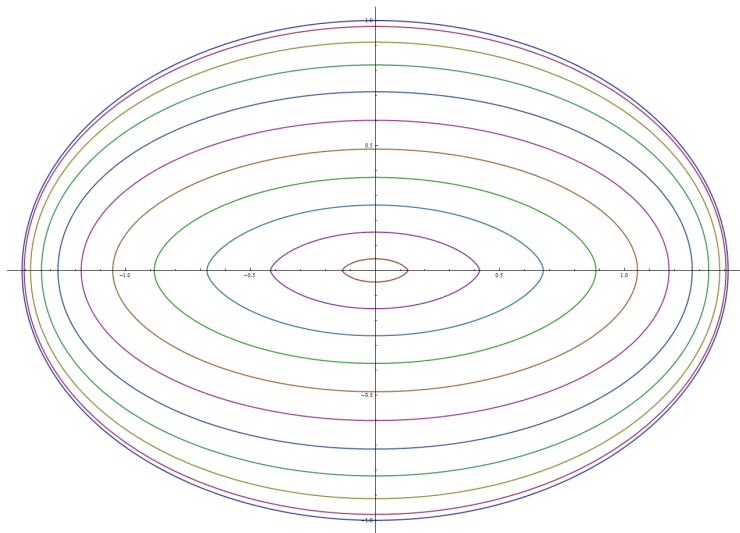
$$z_\alpha(t) = p(t)e^{it} + \{-p(t) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} p(t + \alpha)\}ie^{it} = x_\alpha(t) + iy_\alpha(t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Rozważmy teraz rodzinę krzywych

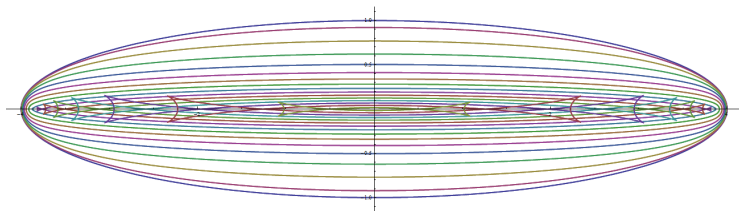
$$X_\alpha = a^2 \frac{-y'_\alpha}{x_\alpha y'_\alpha - y_\alpha x'_\alpha}$$
$$Y_\alpha = b^2 \frac{x'_\alpha}{x_\alpha y'_\alpha - y_\alpha x'_\alpha}.$$



Krzywe dualne do izoptyk elipsy  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$  przekształcone przez  $a = 4$ ,  $b = 1$ .



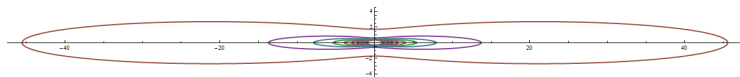
Krzywe dualne do izoptyk elipsy  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$  przekształcone przez  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$ .



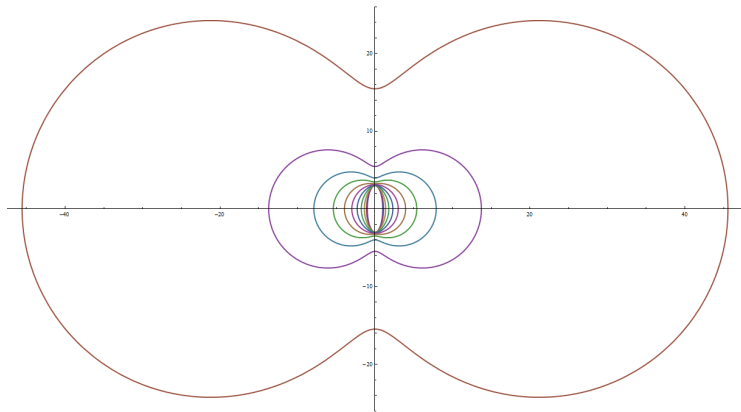
Krzywe dualne do izooptyk elipsy  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$  przekształcone przez  $a = 4$ ,  $b = 1$  oraz izooptyki wewnętrzne tej elipsy na jednym rysunku.

Krzywe dualne do izoptyk wewnętrznych dane są wzorem

$$C_{\text{iso}}^{\alpha *} : z_{\text{iso}}^{\alpha *} (t) = \left\{ -\frac{q(t)[2]}{[q(t), z(t)]}, \frac{q(t)[1]}{[q(t), z(t)]} \right\}.$$

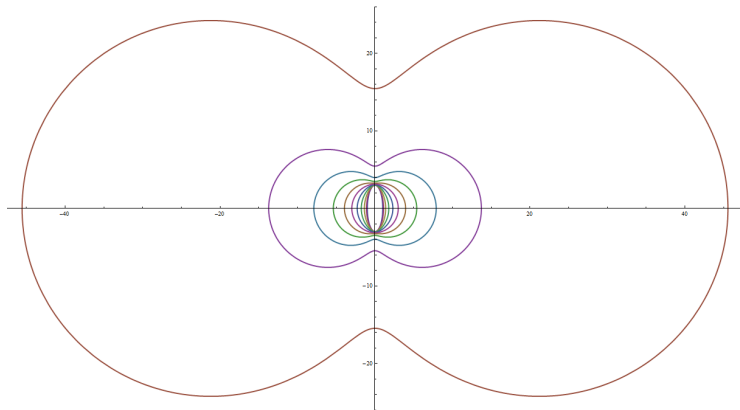


Krzywe dualne do izoptyk wewnętrznych i izoptyki elipsy  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$ .



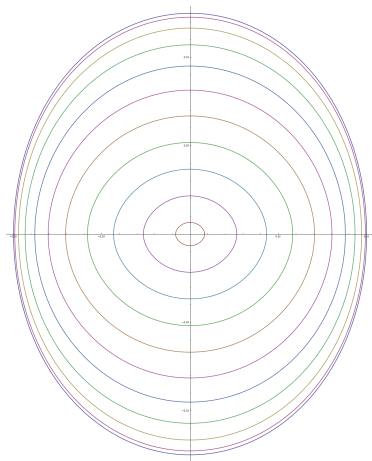
Izooptyki elipsy  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

# Porównanie krzywych dualnych do izoptyk wewnętrznych elipsy i izoptyk elipsy



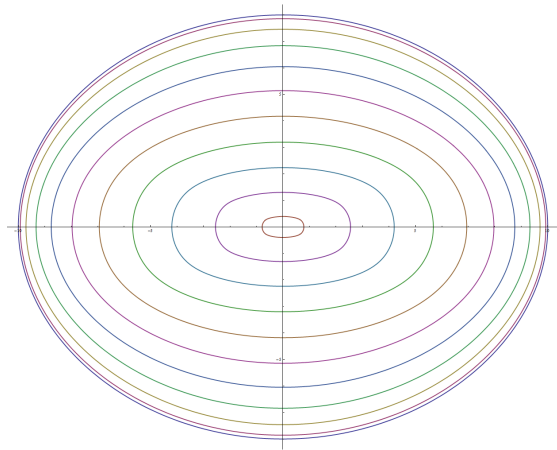
Przeskalowane krzywe dualne do izoptyk wewnętrznych i izoptyki elipsy  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$  na jednym rysunku.

A co dla innych owali?



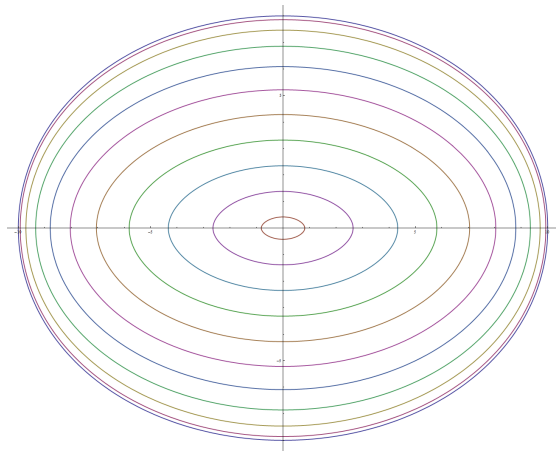
Krzywe dualne izoptyk krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 9 + \cos 2t$ .

A co dla innych owali?



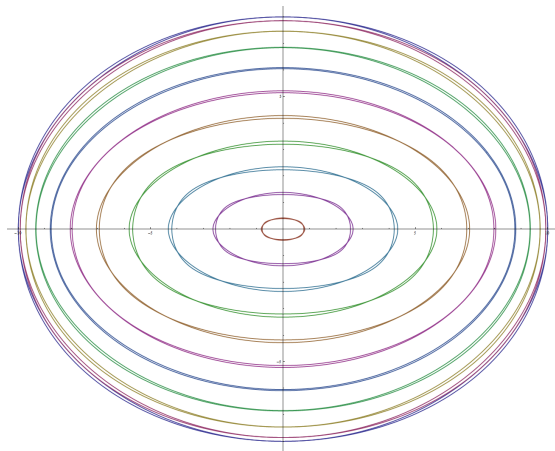
Izooptyki wewnętrzne krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 9 + \cos 2t$ .

A co dla innych owali?



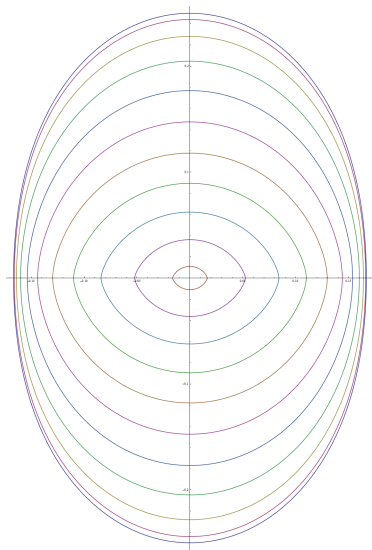
Zmodyfikowane krzywe dualne izoptyk krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 9 + \cos 2t$ .

A co dla innych owali?



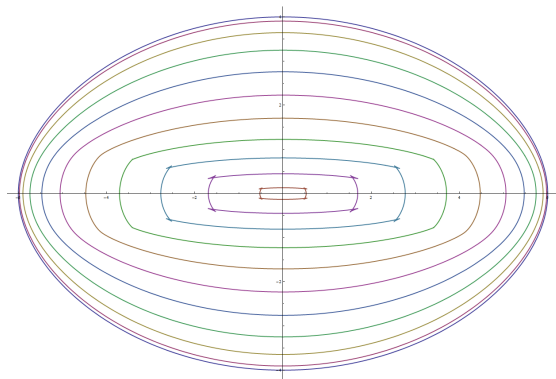
Izooptyki wewnętrzne i przeskalowane krzywe dualne izooptyk krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 9 + \cos 2t$  na jednym rysunku.

A co dla innych owali?



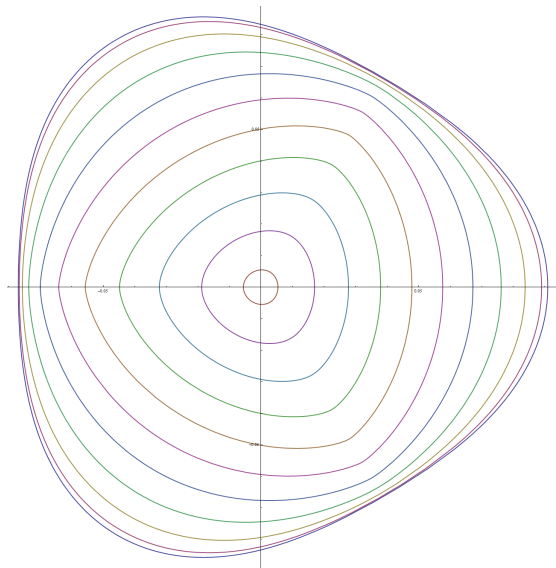
Krzywe dualne izoptyk krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 5 + \cos 2t$ .

## A co dla innych owali?



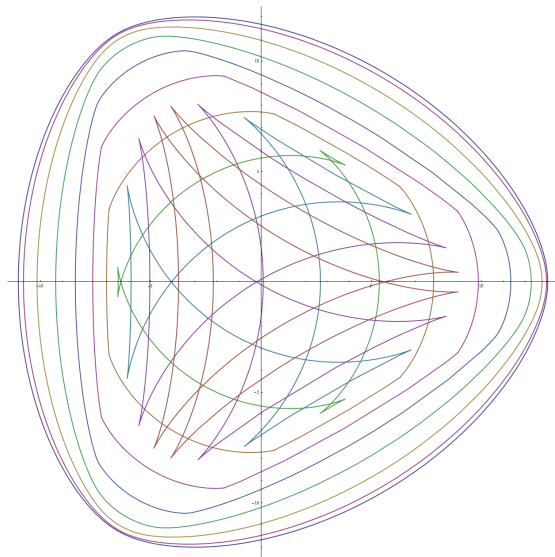
Izooptyki wewnętrzne krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 5 + \cos 2t$ .

A co dla innych owali?



Krzywe dualne izoptyk krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 12 + \cos 3t$ .

A co dla innych owali?



Izooptyki wewnętrzne krzywej o funkcji podparcia  $p(t) = 12 + \cos 3t$ .

Dziękuję