

Struktury prawie wielomianowe z koneksji liniowych

(On almost polynomial structures from classical linear connections)

Anna Bednarska

18 czerwca 2018

Referat na podstawie pracy p.t.

"On almost polynomial structures from classical linear connections"

Zakładamy, że wszystkie rozważane rozmaitości są Hausdorffa, skończonego wymiaru, ośrodkowe, bez brzegów oraz gładkie (klasy C^∞). Przyjmujemy, że odwzorowania pomiędzy rozmaitościami są klasy C^∞ .

$\mathcal{M}f_m$ - kategoria rozmaitości m -wymiarowych i dyfeomorfizmów lokalnych pomiędzy nimi

$\mathcal{VB}$ - kategoria wiązek wektorowych oraz homomorfizmów pomiędzy nimi

$\mathcal{V}_m$ - kategoria przestrzeni wektorowych rzeczywistych m -wymiarowych i izomorfizmów liniowych

$\mathcal{V}$ - kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych i odwzorowań liniowych

Scharakteryzujemy wszystkie funktory kowariantne regularne $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ dopuszczające operatory $\mathcal{M}f_m$ -naturalne $\tilde{P}$ przekształcające klasyczne koneksje liniowe ∇ na m -rozmaitościach M w prawie wielomianowe w -struktury $\tilde{P}(\nabla)$ na $F(T)M = \bigcup_{x \in M} F(T_x M)$, gdzie T oznacza funktor styczny na kategorii $\mathcal{M}f_m$ oraz w jest wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych.

Jeśli $w(t) = t^2 + 1$ otrzymujemy rezultat z pracy "On almost complex structures from classical linear connections" autorstwa profesorów J. Kurka oraz W. Mikulskiego, charakteryzującej funktory kowariantne regularne $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ dopuszczające operatory $\mathcal{M}f_m$ -naturalne $\tilde{J}$ przekształcające klasyczne koneksje liniowe ∇ na m -rozmaitościach M w struktury prawie zespolone $\tilde{J}(\nabla)$ na $F(T)M$.

Jeśli $w(t) = t^2 - 1$, to scharakteryzujemy funktory kowariantne regularne $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ dopuszczające operatory $\mathcal{M}f_m$ -naturalne $\tilde{J}$ przekształcające klasyczne koneksje liniowe ∇ na m -rozmaitościach M w struktury prawie para-zespolone $\tilde{J}(\nabla)$ na $F(T)M$.

Niech $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ będzie funktorem kowariantnym regularnym. Regularność funktora F oznacza, że F przekształca gładko sparametryzowane rodziny izomorfizmów na gładko sparametryzowane rodziny odwzorowań liniowych. Niech $T: \mathcal{M}f_m \rightarrow \mathcal{VB}$ będzie funktorem stycznym przekształcającym dowolną m -wymiarową rozmaitość M w wiązkę styczną TM rozmaitości M oraz dowolne $\mathcal{M}f_m$ -odwzorowanie $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ w odwzorowanie styczne $T\varphi: TM_1 \rightarrow TM_2$.

Jeśli zastosujemy funktor F do włókien $T_x M$ wiązki TM , możemy zdefiniować wiązkę naturalną wektorową $F(T)$ rzędu 1 nad m -rozmaitościami za pomocą

$$F(T)M = \bigcup_{x \in M} F(T_x M)$$

oraz

$$F(T)\varphi = \bigcup_{x \in M} F(T_x \varphi): F(T)M_1 \rightarrow F(T)M_2$$

dla dowolnej m -rozmaitości M oraz dowolnego $\mathcal{M}f_m$ -odwzorowania $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ pomiędzy m -rozmaitościami M_1 i M_2 . W szczególności, jeśli F jest funktorem identycznościowym, wtedy $F(T) = T$.

Klasyczną koneksją liniową na rozmaitości M nazywamy $\mathbb{R}$ -dwuliniowe odwzorowanie $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ takie, że:

- 1 $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$
- 2 $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- 3 $\nabla_X (fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$

gdzie $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ są dowolnymi polami wektorowymi na rozmaitości M oraz $f, f_1, f_2: M \rightarrow \mathbb{R}$ są dowolnymi funkcjami gładkimi na M .

Równoważnie, klasyczną koneksją liniową na M nazywamy prawoniezmienniczy rozkład $TLM = H^\nabla \oplus VLM$ wiązki stycznej TLM wiązki LM , gdzie LM jest wiązką główną (z grupą strukturalną $GL(m)$) reperów liniowych rozmaitości M oraz VLM jest wiązką wertykalną wiązki LM .

Niech $w(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$ będzie wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych $a_{m-1}, \dots, a_0$.
 w -strukturą wielomianową na przestrzeni wektorowej rzeczywistej W nazywamy endomorfizm liniowy $P: W \rightarrow W$ taki, że
 $w(P) = P^m + a_{m-1}P^{m-1} + \dots + a_1P + a_0I = 0$, gdzie P^k oznacza złożenie $\underbrace{P \circ \dots \circ P}_{k\text{-razy}}$ oraz I oznacza odwzorowanie identycznościowe na W .

Prawie wielomianową w -strukturą na rozmaitości N nazywamy pole tensorowe $\tilde{P}: TN \rightarrow TN$ na rozmaitości N typu $(1, 1)$ (afinor) takie, że $P_x: T_x N \rightarrow T_x N$ jest w -strukturą wielomianową na $T_x N$ dla dowolnego $x \in N$. Innymi słowy, jest to pole tensorowe typu $(1, 1)$ spełniające równanie wielomianowe $P^m + a_{m-1}P^{m-1} + \dots + a_1P + a_0I = 0$ w każdym punkcie rozmaitości N , gdzie $a_{m-1}, \dots, a_0$ są liczbami rzeczywistymi.

Ogólne pojęcie operatorów naturalnych może być znalezione w fundamentalnej monografii Kolář, I., Michor, P.W., Slovák, J., "Natural Operations in Differential Geometry". Potrzebujemy tylko następującego szczególnego przypadku.

Niech $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ będzie funktorem kowariantnym regularnym. Operatorem $\mathcal{M}f_m$ -naturalnym przekształcającym klasyczne koneksje liniowe ∇ na m -rozmaitościach M w prawie wielomianowe w -struktury $\tilde{P}(\nabla): TF(T)M \rightarrow TF(T)M$ na $F(T)M$ nazywamy rodzinę $\mathcal{M}f_m$ -niezmienniczą $\tilde{P}: Q \rightsquigarrow (AwS)F(T)$ operatorów

$$\tilde{P}: Q(M) \rightarrow (AwS)(F(T)M)$$

dla m -rozmaitości M , gdzie $Q(M)$ oznacza zbiór klasycznych koneksji liniowych na M oraz $(AwS)(F(T)M)$ oznacza zbiór prawie wielomianowych w -struktur na $F(T)M$.

Niezmienniczość operatora $\tilde{P}$ oznacza, że jeśli $\nabla_1 \in Q(M_1)$ oraz $\nabla_2 \in Q(M_2)$ są φ -związane za pomocą włożenia $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ (tzn. jeśli φ jest (∇, ∇_1) -afinicznym włożeniem), wtedy $\tilde{P}(\nabla_1)$ oraz $\tilde{P}(\nabla_2)$ są $F(T)\varphi$ -związane, czyli

$$TF(T)\varphi \circ \tilde{P}(\nabla_1) = \tilde{P}(\nabla_2) \circ TF(T)\varphi.$$

Niech $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ będzie jak wyżej. $\mathcal{V}_m$ -kanoniczną wielomianową w -strukturą na $V \oplus FV$ nazywamy $\mathcal{V}_m$ -niezmienniczy układ P wielomianowych w -struktur

$$P: V \oplus FV \rightarrow V \oplus FV$$

na przestrzeniach wektorowych $V \oplus FV$ dla dowolnych przestrzeni wektorowych rzeczywistych m -wymiarowych V . Niezmienniczość oznacza, że $(\varphi \oplus F\varphi) \circ P = P \circ (\varphi \oplus F\varphi)$ dla dowolnego izomorfizmu liniowego $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ pomiędzy przestrzeniami wektorowymi m -wymiarowymi.

Twierdzenie

Niech $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ będzie funktorem kowariantnym regularnym. Następujące warunki są równoważne:

- (i) Istnieje operator $\mathcal{M}f_m$ -naturalny $\tilde{P}: Q \rightsquigarrow (AwS)F(T)$.
- (ii) Istnieje $\mathcal{V}_m$ -kanoniczna w -struktura P na $V \oplus FV$.

Zastosowanie w strukturach para-zespolonych

Niech $w(t) = t^2 - 1$. Niech J będzie w -strukturą na przestrzeni wektorowej W . Wtedy $W = W_+ \oplus W_-$, gdzie $W_{\pm} = \{v \in W : J(v) = \pm v\}$. Jeśli dodatkowo $\dim(W_+) = \dim(W_-)$, wtedy J jest nazywana strukturą para-zespoloną na W .

Strukturą prawie para-zespoloną na N nazywamy afinor $J: TN \rightarrow TN$ na rozmaitości N taki, że $J_x: T_x N \rightarrow T_x N$ jest strukturą para-zespoloną na $T_x N$ dla dowolnego $x \in N$.

Innymi słowy, strukturą prawie para zespoloną nazywamy pole tensorowe J typu $(1, 1)$ na rozmaitości N parzystego wymiaru m , jeśli są spełnione warunki:

- 1 $J^2 = id_{TM}$
- 2 dla każdego punktu $x \in N$ obie przestrzenie własne $T_x^+ N$ oraz $T_x^- N$ tensora J_x (wartości pola tensorowego J w punkcie x) są $\frac{m}{2}$ -wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni stycznej $T_x N$ w punkcie x .

Wniosek

Niech $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ będzie funktorem kowariantnym regularnym. Następujące warunki są równoważne.

- (a) Istnieje operator $\mathcal{M}f_m$ -naturalny $\tilde{J}: Q \rightsquigarrow (APC)F(T)$ przekształcający klasyczne liniowe koneksje ∇ na m -rozmaitościach M w struktury prawie para-zespolone $\tilde{J}(\nabla)$ na $F(T)M$;
- (b) Istnieje $\mathcal{V}_m$ -kanoniczna struktura para-zespolona J na $V \oplus FV$.

Lemat

Niech p będzie dodatnią liczbą całkowitą. Niech $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$ będzie funktorem kowariantnym regularnym danym za pomocą $FV = V \times \cdots \times V$ ($(p-1)$ razy V) oraz $F\varphi = \varphi \times \cdots \times \varphi$ ($(p-1)$ razy φ). Jeśli p jest liczbą parzystą, wtedy istnieje $\mathcal{V}_m$ -kanoniczna struktura para-zespolona na $V \oplus FV$.

Dowód

Jeśli p jest parzyste, mamy $\mathcal{V}_m$ -kanoniczną strukturę para-zespoloną na $V \times \cdots \times V$ (p razy V). Mianowicie, $\frac{p}{2}$ kopii kanonicznych struktur para-zespolonych na $V \times V$, $(v, w) \rightarrow (v, -w)$.

Algebrą Weila A nazywamy skończenie wymiarową lokalnie przemienną algebrę z jedyneką 1_A , to znaczy $A = \mathbb{R} \cdot 1_A \oplus N_A$, gdzie N_A jest ideałem elementów nilpotentnych (dzielników zera).

Lemat

(Lemat 5.1 z pracy: Kurek, J., Mikulski, W.M., On lifting of connections to Weil bundles). Niech A będzie p -wymiarową algebrą Weila oraz niech T^A będzie odpowiadającym funktorem Weila. Dla dowolnej klasycznej koneksji liniowej ∇ na m -rozmaitości M mamy dyfeomorfizm włóknisty zachowujący bazę $I_{\nabla}^A: T^A M \rightarrow TM \otimes \mathbb{R}^{p-1}$ kanonicznie zależy od ∇ .

Widzimy, że

$TM \otimes \mathbb{R}^{p-1} = TM \times_M \cdots \times_M TM \text{ } ((p-1) \text{ razy } TM) = F(T)M$,
gdzie $F: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}$, $FV = V \times \cdots \times V \text{ } ((p-1) \text{ razy } V)$,
 $F\varphi = \varphi \times \cdots \times \varphi \text{ } ((p-1) \text{ razy } \varphi)$. Zatem z wniosku 1 oraz
lematów 1 i 2 otrzymujemy

Propozycja

Niech A będzie algebrą Weila. Jeśli A jest parzystego wymiaru, wtedy istnieje operator $\mathcal{M}f_m$ naturalny $\tilde{J}: Q \rightsquigarrow (APC)T^A$ przekształcający klasyczne koneksje liniowe ∇ na m -rozmaitościach M w struktury prawie para-zespolone $\tilde{J}(\nabla)$ na $T^A M$.

-  Kaneyuki, S., Kozai, M., Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math., vol 8, no. 1, 1985, 81-98
-  Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry, Vol I, Interscience Publisher, New York - London, 1963
-  Kolář, I., Michor, P.W., Slovák, J., Natural Operations in Differential Geometry, Springer - Verlag, 1993
-  Kurek, J., Mikulski, W.M., On lifting of connections to Weil bundles, Ann. Polon. Math. 103.3(2012), 319-324
-  Kurek, J., Mikulski, W.M., On almost complex structures from classical linear connections, Ann. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Section A, 71(1)(2017), 55-60

-  Libermann, P., Sur les structures presque paracomplexes, C.R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), 2517-2519
-  Libermann, P., Sur le probleme d'equivalence de certaines structures infinitesimales, Ann. Mat. Pura Appl., 36 (1954), 27-120

Dziękuję za uwagę.

Operator naturalny (1/2)

Operatorem naturalnym $A: F \rightsquigarrow G$ pomiędzy dwiema wiązkami naturalnymi F i G nazywamy układ odwzorowań $A = (A_M)$, $A_M: C^\infty(FM) \rightarrow C^\infty(GM)$ dla dowolnej rozmaitości M wymiaru m , spełniających:

- (a) (Warunek naturalności). Dla dowolnego przekroju $s \in C^\infty(FM)$ oraz dla dowolnego dyfeomorfizmu $f: M \rightarrow N$ zachodzi

$$A_N(Ff \circ s \circ f^{-1}) = Gf \circ A_M s \circ f^{-1}$$

Operator naturalny (2/2)

- (b) (Warunek lokalności). Dla dowolnego przekroju $s \in C^\infty(FM)$ oraz dla dowolnej podrozmaitości otwartej $U \subset M$ zachodzi

$$A_U(s|U) = (A_M s)|U$$

- (c) (Warunek regularności). A_M przeprowadza gładko sparametryzowany układ przekrojów dla FM w gładko sparametryzowany układ przekrojów dla GM .